Sončnica

Verižni ulomki

Vsak ulomek $r = p/q$ lahko zapišemo v obliki končnega verižnega ulomka.

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots],$$

kjer so a_i koeficienti verižnega ulomka. Koeficient a_0 je celo število, medtem so ko ostali koeficienti a_i, $i > 0$, cela pozitivna števila.
Iracionalno število se predstavi v obliki verižnega ulomka z neskončno členi.

Zlati rez

Izračunajmo število $\Phi = [1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots]$

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}} = [1; 1, 1, 1, \dots],$$

V imenovlacu prvega ulomka je tudi razvoj števila Φ. Velja $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$.
Vrednost Φ lahko izračunamo s pomočjo iteracije.

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$$

Izberemo dovolj majhno število število ϵ. Računamo toliko časa, da razlika $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$.
Števila x_n so racionalna. Poglejmo si jih pobliže.

$$x_2 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, \quad x_4 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

Bežen pogled nam razkrije kako je zaporedje $\{x_n\}$ sestavljeno. Če vzamemo, da je

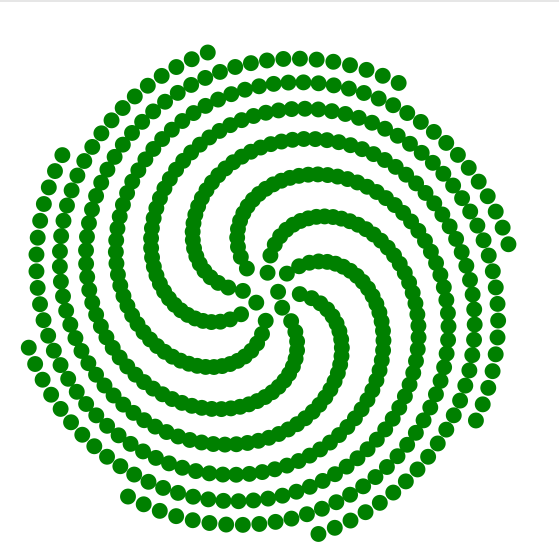
$$F_1 = 1, F_2 = 1, \quad \text{in} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \text{potem je} \quad x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

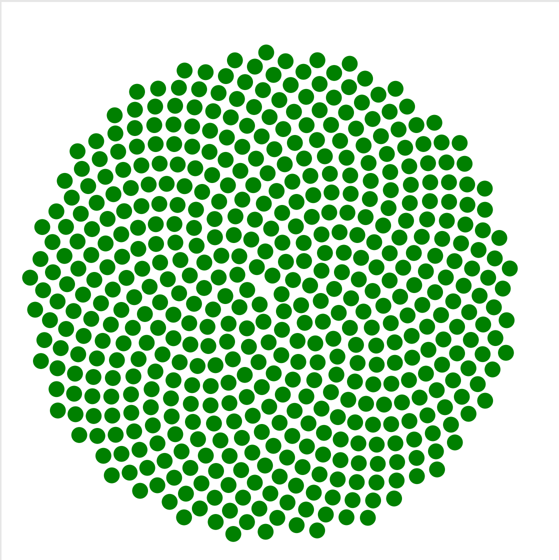
Zaporedje $\{F_n\}$ je Fibonaccijevo zaporedje.

Definicija problema

- Poiščimo približno vrednost števila Φ.
- Določimo zlati kot $\alpha = 360^\circ\,(\Phi - 1) \approx 222.49^\circ$.
- Napišimo program `soncnica(phi, m=987)`, ki nariše graf sončnice, kot prikazuje slika.
- Dve zaporedni semeni, sta zamaknjeni za kot ϕ izraženem v stopinjah.
- Oddaljenost od središča socvetja narašča s $\sqrt{n}$, kjer je n zaporedno število semena.
- Spreminjamo kot ϕ in gledamo porazdelitev semen.
- Na koncu izpišemo verižni ulomek $\phi/360$. Kaj opazimo?

Sončnica





Slika 0.1: Kot na levi je 224.5°, kot na desni je zlati kot.

Graf sončnice v programskem jeziku Scratch se nahaja na naslovu:
`https://scratch.mit.edu/projects/211066857/` Če spreminjamo kot med položajema dveh zaporednih semen ugotovimo, da se pri zlatem kotu semena najbolj enakomerno porazdelijo. Zakaj? Razlago najdete na naslovu:
`https://www.youtube.com/watch?v=sj8Sg8qnjOg`

Python

Python urejevalnik se nahaja na strani:
`https://www.w3resource.com/python-exercises/python-basic-exercises.php#EDITOR`

Rešitev

```python
#!/usr/bin/env python3
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np


def fibonacci(n):  # Fibonaccijevo zaporedje
    a = 1
    b = 1
    for i in range(n - 1):
        a, b = b, a + b
    return a, b


def contfrac(x, y):  # Verižni ulomek
    assert x > 0 and y > 0, "x,y > 0"
    cf = []
    if x < y:
        cf.append(0)
        x, y = y, x
    while y > 0:
        cf.append(x // y)
        x, y = y, x % y
    return cf


def golden(epsilon):  # Izračuna razmerje zlatega reza
    x = 1
    while True:
        y = 1 + 1 / x
        if abs(x - y) < epsilon:
            return y
        x = y


def rot(ort, alpha):  # Zavrti kazalec ort za kot alpha
    alpha = np.pi * alpha / 180.0
    x = ort[0]
    y = ort[1]
    res = [x * np.cos(alpha) - y * np.sin(alpha), x * np.sin(alpha) + y *
    ↪  np.cos(alpha)]
    return res


def scale(ort, r):  # Raztegne kazalec ort za faktor r
    x = ort[0]
    y = ort[1]
    res = [r * x, r * y]
    return res


f = 360 / golden(1e-6)
print(f)
```

```
def sunflower(alpha=f, m=987):  # Risanje sončnice
    r = 5
    ort = [0, 1]
    x = []
    y = []
    for n in range(m):  # mesto semen
        R = scale(ort, np.sqrt(n))
        x.append(R[0])
        y.append(R[1])
        ort = rot(ort, alpha)
    plt.scatter(x, y, s=20, c=[[0.9, 0.7, 0]])
    plt.xticks([]);
    plt.yticks([]);
    plt.axis('equal')
    plt.show()  # risanje


if __name__ == '__main__':
    k = input(' --> ').split()
    if not k:
        sunflower()  # če argumenta ni se upošteva zlati rez
    else:
        k = [int(x) for x in k]
        if len(k) == 1:  # je en sam argument vzamemo kvocient
            # sosednjih (k in k+1) členov fiboneccijevega zaporedja
            a, b = fibonacci(k[0])
        else:
            a, b = k  # kvocient a/b
        sunflower(360.0 / (b / a))
        print(contfrac(b, a))  # izpis koeficientov verižnega ulomka
```