VSEBINA

Nagrajenci nagradne logične naloge

Izžrebali smo tri nagrajence, ki bodo po pošti prejeli nagrade:
- **Sergeja Valič**, 5270 Ajdovščina
- **Alenka Gros**, 1433 Radeče
- **Luka Guegl**, 3270 Laško

Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik.
Poslovni račun pri NLB: 02312-0016592829. **Davčna številka:** SI56917309.
Podjetje je obvezni zavezanec po zakonu o DDV.
Za izdajatelja: *Izidor Hafner*.
Telefon: (01)8314 915. **E-mail**: logika@siol.net.
Revija *Logika & razvedrilna matematika* je vpisana v register medijev pri Ministrstvu za kulturo pod številko 759.
Revijo *Logika in razvedrilna matematika* subvencionira Ministrstvo za šolstvo in šport.

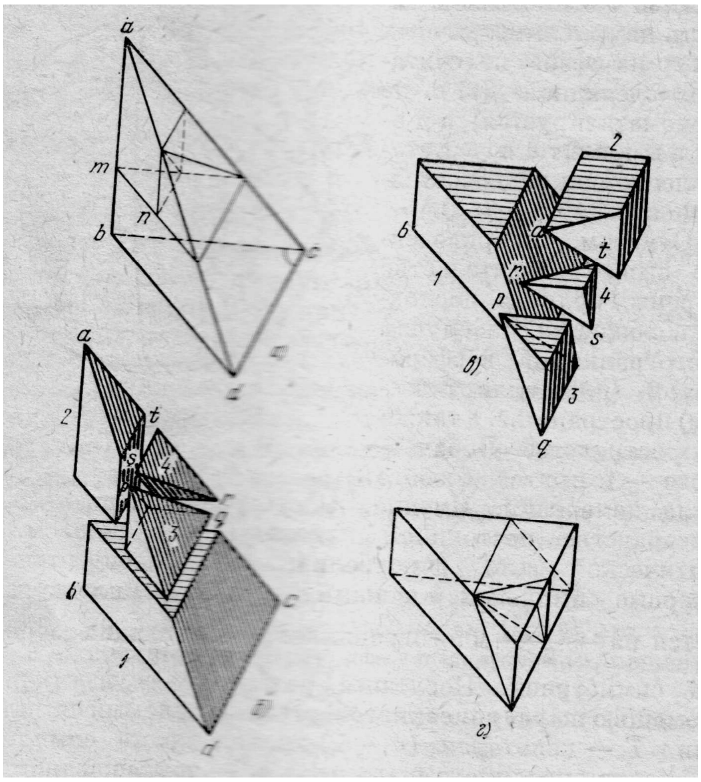
Glavni in odgovorni urednik: *dr. Izidor Hafner*. (http://torina.fe.uni-lj.si/~izidor)
Člana časopisnega sveta: *prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.*
Sodelavci: *mag. Urša Demšar, dr. Gregor Dolinar, Petra Grošelj, Monika Kavalir,dr. Meta Lah, Boštjan Kuzman, Dragoljub M. Milošević, Teja Oblak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, mag. Katka Šenk in dr. Aleš Vavpetič.*
Oblikovanje: *Ana Hafner*. **Jezikovni pregled**: *Barbara Janežič Bizant*.
Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – oddelek za teoretično računalništvo.
Generalni sponzor: Marand d.o.o., Zastopstvo Borland.
Tisk: Tiskarna Littera picta, Rožna dolina c. IV/32-36, Ljubljana. **Naklada**: 900 izvodov.

ISSN 0354 – 0359
LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik XV, št. 4, 2005/2006
Cena revije: letna naročnina 3650 SIT (15.2 EUR, 8.5% DDV je vključen). Posameznih številk ne prodajamo.
Naročnina za posameznike velja do pisnega preklica

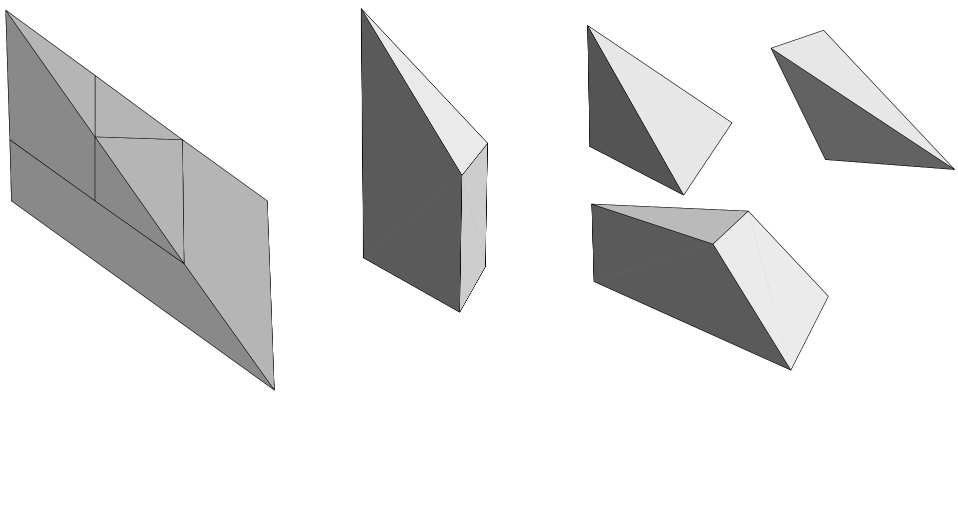
Tretji Hilbertov problem

Leta 1900 je znameniti nemški matematik David Hilbert (1862–1943) predstavil seznam 23 najpomembnejših še nerešenih matematičnih problemov. Tretji problem na tem seznamu je bil takrat že rešen.

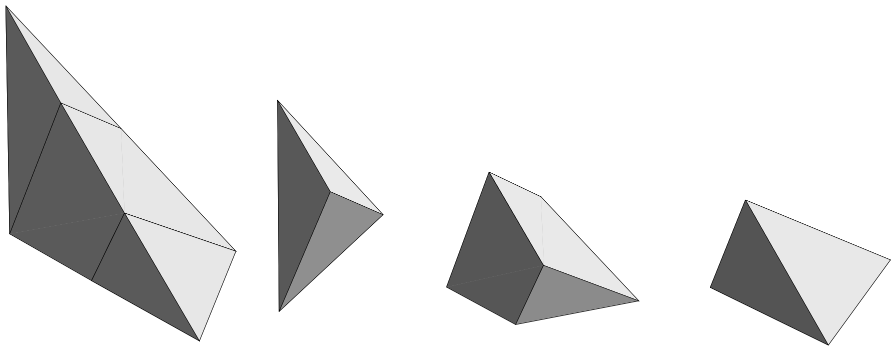
Njegov učenec Max Dehn (1878–1952) je dokazal, da obstajajo poliedri z enako prostornino, ki jih ne moremo sestaviti iz enakih delov. V posebnem primeru je dokazal, da kocke ne moremo razrezati na končno mnogo poliedrov, iz katerih bi lahko sestavili pravilni četverec istega volumna.
Leta 1896 je Hill našel več primerov četvercev, ki jih lahko razrežemo in nato iz delov sestavimo pokončno prizmo. Najzanimivejši primer prikazuje desna slika.



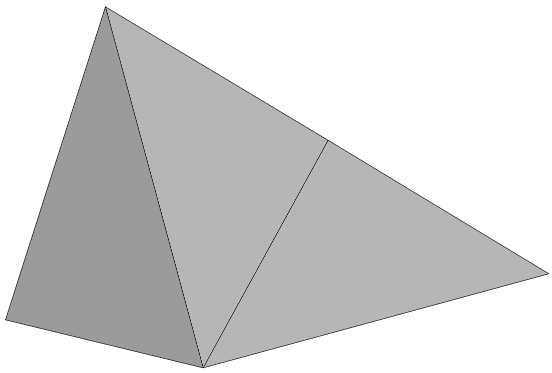
Četverec razrežemo na štiri dele. V prilogi sta dana kompleta mrež, ki omogočata sestavo obeh teles. Omenjeno delitev je odkril Sydler l. 1956.



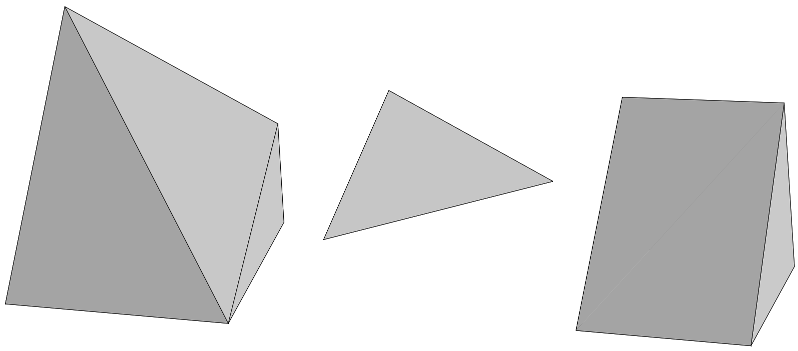
Obstaja še enostavnejša delitev Hillovega četverca na tri dele, ki dajo neko drugo prizmo. To je odkril Phillip Schobi l. 1985.



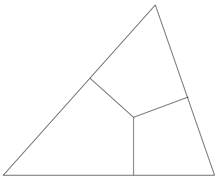
Uporabi mreže v prilogi za sestavo dveh teles.



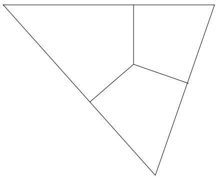
Sydler je l. 1965 dokončno zaključil naloge v zvezi s tretjim Hilbertovim problemom. Dokazal je, da je Dehnov pogoj tudi zadosten za enako sestavljivost teles: Za enako sestavljivost teles je potrebno in zadostno f(A)=f(B), za vsako aditivno funkcijo, ki izpolnjuje pogoj $f(\pi)=0$. Danes temu pravimo Dehn-Sydlerjev izrek.



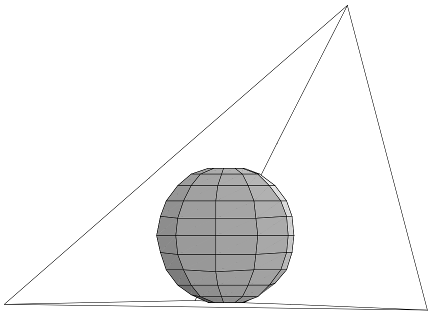
V dokazu tega izreka je tudi delitev piramide s posebno trapezno osnovo in sestavo delov v trikotno prizmo.
Mreže so dane v prilogi.

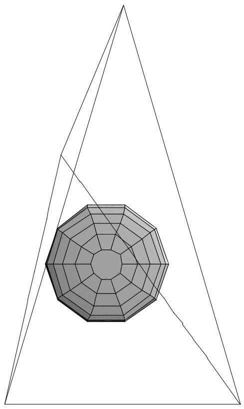


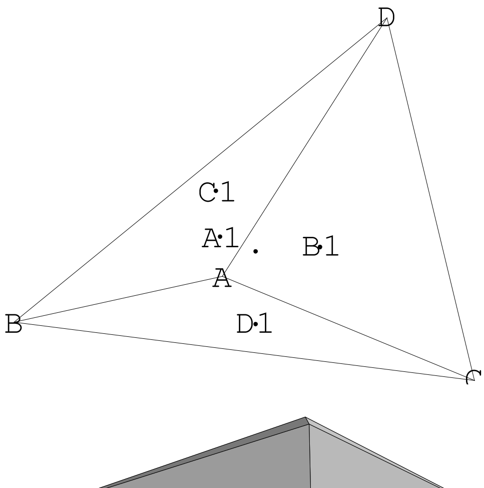
V nasprotju s poliedri pa sta dva mnogokotnika z enako ploščino tudi enako sestavljiva.
Že leta 1844 je Gerling dokazal, da sta polieder in njegova zrcalna podoba enako sestavljiva. Ideja je v bistvu enaka kot pri trikotniku. Trikotnik razrežemo na dele (deltoide), ki so zrcalno simetrični. V prostoru pa polieder razrežemo v četverce, ki jih nato razrežemo v simetrične dele.



Da lahko četverec razrežemo na 6 simetričnih delov, je pokazal Jessen l. 1968. To naredimo podobno kot pri trikotniku, le da v prostoru včrtamo kroglo v četverec.







Če označimo dotikališča včrtane krogle z mejnimi ploskvami četverca z A1, B1, C1 in D1, potem priredimo vsakemu robu (kot primer vzemimo BC) polieder, ki ga tvorijo oglišča: B, C, D1, A1 in središče včrtane sfere.

Izidor Hafner

Sudoku

TEHNIKE REŠEVANJA

Ročno reševanje

Sudoku je logična uganka, kar pomeni, da jo je največkrat možno rešiti s sklepanjem. Res da je lahko sklepanje včasih nekoliko bolj zahtevno, vendar praviloma ugibanje ni potrebno. Pri najtežjih ugankah pa lahko logika odpove ali pa je sklepanje zelo komplicirano. Takrat pa le (nadzorovano) uporabimo ugibanje!

Računalniški programi

Računalniški programi brez težav rešijo sudoku, ne glede na uporabljen postopek.
* Najbolj enostavna (in najpočasnejša) je metoda zelo grobe sile. Generiramo vse možne permutacije in ugotovimo ali ustrezajo zahtevam. Če je podanih približno 30 števil, jih moramo določiti še 50. Število $50!=3 \times 10^{64}$ je preveliko za današnje računalnike.
* Hitrejša in popolnoma avtomatizirana metoda je metoda vračanja (backtracking). Najprej v vsaki celici označimo možne kandidate in jih ob vsaki potezi ažuriramo. Izberemo si celico s čim manj možnimi kandidati, predpostavimo, da je eden od njih pravilen, in poskušamo rešiti uganko. Če se postopek ustavi zaradi protislovja, se vrnemo nazaj do predpostavke in izberemo novo možnost. Seveda se bo zgodilo, da bo treba še kdaj med reševanjem postaviti nove predpostavke, ampak postopek bi slej ko prej pripeljal do rešitve (ali pa bi nam zagotovil, da ta ne obstaja).
* Najbolj učinkovita pot je oponašanje "ročnega" načina reševanja, dokler gre, potem po potrebi zaključimo z metodo vračanja.

Oznake in zapis

Stolpce in vrstice označujemo s števili od 1 do 9, podobno označimo manjše kvadrate (tudi bloke). Položaj vprašaja je tako: 4. vrstica, 6. stolpec, 5. kvadrat, krajši zapis (4,6).

Spomnimo se še enkrat osnovnega pravila: vsaka vrstica, stolpec in kvadrat vsebujejo vsa števila med 1 in 9 natančno enkrat.

stolpci

vrstice

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	**1**			**2**			**3**	
3								
4					**?**			
5	**4**			**5**			**6**	
6								
7								
8	**7**			**8**			**9**	
9								

EDINI KANDIDAT

Poglejmo preprosto sudoku uganko. Določimo položaj 6 v kvadratu 4.

Šestica že nastopa v 2. in 3. stolpcu, manjka le še v 1. stolpcu, kar nam v 4. kvadratu pusti samo še eno možnost: (4,1). To zapišemo (4,1) = 6.

Na isti način določimo v tem kvadratu še petko in devetko. To tehniko imenujemo tudi *edini kandidat v kvadratu*. Podobno določimo tudi sedmico v kvadratu 7.

			1		**2**	**4**	**9**	**6**
				3				
		6				**3**		
		3					**8**	**2**
4	**7**						**3**	**1**
1	**8**					**6**		
		4				**9**		
				7				
2	**6**	**5**	**4**		**8**			

V četrtem kvadratu manjkata samo še 2 in 9. Ker šesta vrstica že vsebuje 9, lahko dopolnimo kvadrat.

			1		2	4	9	6
				3				
		6				3		
6	**5**	3					8	2
4	7	**9**					3	1
1	8	**2**				6		**9**
7		4				9		
				7				
2	6	5	4		8			

			1		2	4	9	6
				3				
		6				3		
6	**5**	3					8	2
4	7						3	1
1	8					6		**9**
7		4				9		
				7				
2	6	5	4		8			

Določimo trojko v deveti vrstici. Na označenih poljih je ne sme biti, kar nam pusti le še polje v vogalu (9,9). To tehniko imenujemo tudi *edini kandidat v vrstici (ali v stolpcu).*

			1		2	4	9	6
				3				
		6				3		
6	**5**	3					8	2
4	7	**9**					3	1
1	8	**2**				6		**9**
7		4				9		
				7				
2	6	5	4		8			**3**

Katero število je pod vprašajem (1,2)? V prvi vrstici, drugem stolpcu in prvem kvadratu se je pojavilo že osem različnih vrednosti, ostane samo še trojka. To tehniko imenujemo tudi *edini kandidat v celici.*

	?		1		2	4	9	6
				3				
		6				3		
6	**5**	3					8	2
4	7	**9**					3	1
1	8	**2**				6		**9**
7		4				9		
				7				
2	6	5	4		8			**3**

POVEZANE PODMNOŽICE (ALI GOLI PAR)

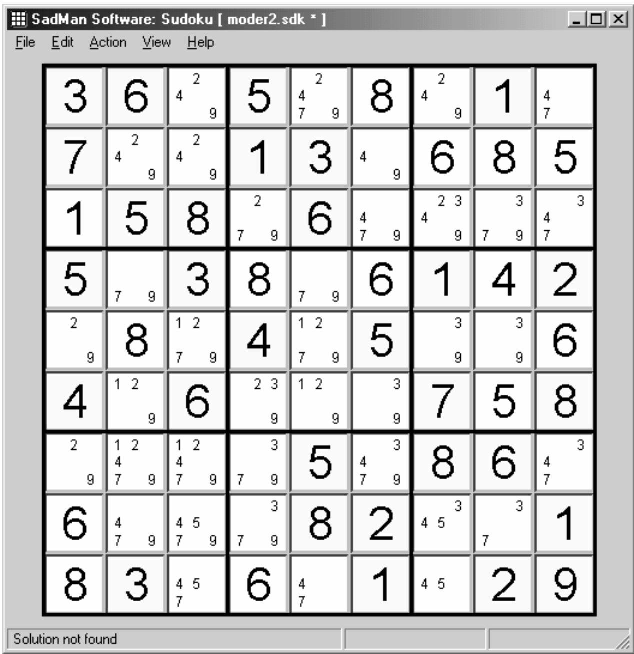
Poglejmo težjo sudoku uganko.

3	6		5				1	
7			1	3				
	5	8		6				
5		3				1		2
			4		5			
4		6				7		8
				5		8	6	
				8	2			1
	3				1		2	9

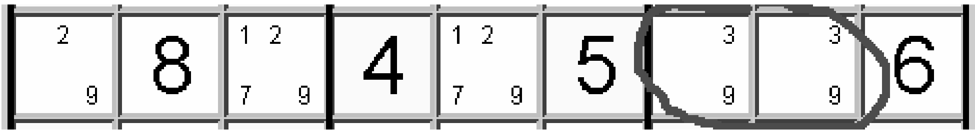
Po uporabi tehnike *edinega kandidata*, se ustavimo tule:

3	6		5		**8**		1	
7			1	3		**6**	**8**	**5**
1	5	8		6				
5		3	**8**		**6**	1	**4**	2
	8		4		5			**6**
4		6				7	**5**	8
				5		8	6	
6				8	2			1
8	3		**6**		1		2	9

Zelo učinkovito pomagalo pri reševanju so tudi manjše oznake s svinčnikom (pencil marks), ki nam povedo, katera števila (kandidati) glede na pravila sploh lahko še pridejo v okence. Če jih vpisujemo ročno na papir, je dobro, da so celice dovolj velike. Lahko si pomagamo tudi s programi, ki to vpišejo samodejno.

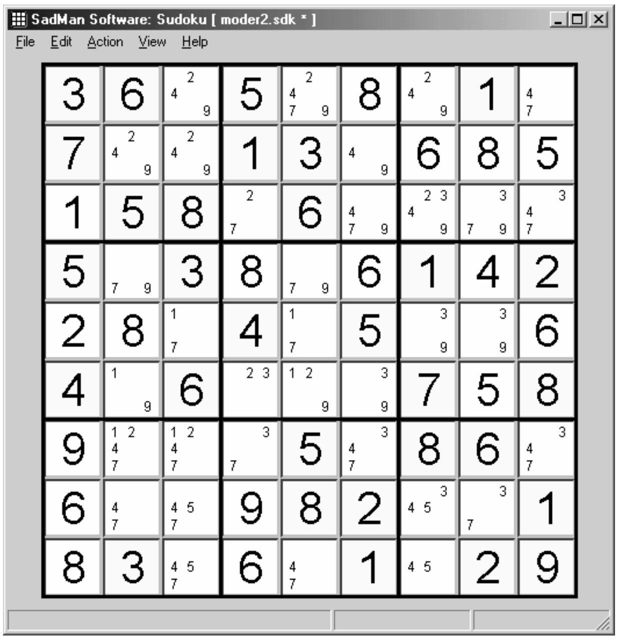


Poglejmo peto vrstico in v njej označeni celici. Kaj lahko sklepamo?

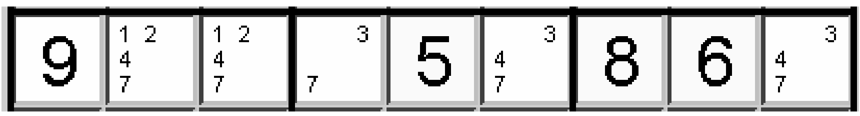


3 in 6 sta natanko v eni od teh dveh celic, kar pomeni, da ju lahko izločimo iz ostalih kandidatov **v tej vrstici**. To tehniko imenujemo *povezane podmnožice (ali goli par*).

Tako je na začetku vrste dvojka, v tretji in peti celici pa ostaneta 1 in 7. Nato določimo še devetki (7,1) in (8,4).

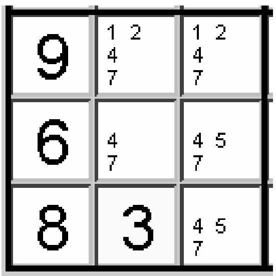


V sedmi vrstici imamo še en primer, tokrat s tremi števili (*gola trojka*) 3, 4, 7. Iz preostalih celic zato lahko te kandidate izločimo.



Nič ni narobe, če v eni celici manjka štirica. Pravzaprav lahko uporabimo metodo tudi v primeru {3,4}, {4,7} in {3,4,7} ali pa celo {3,4}, {4,7} in {3,7}!

IZKLJUČNA PODMNOŽICA

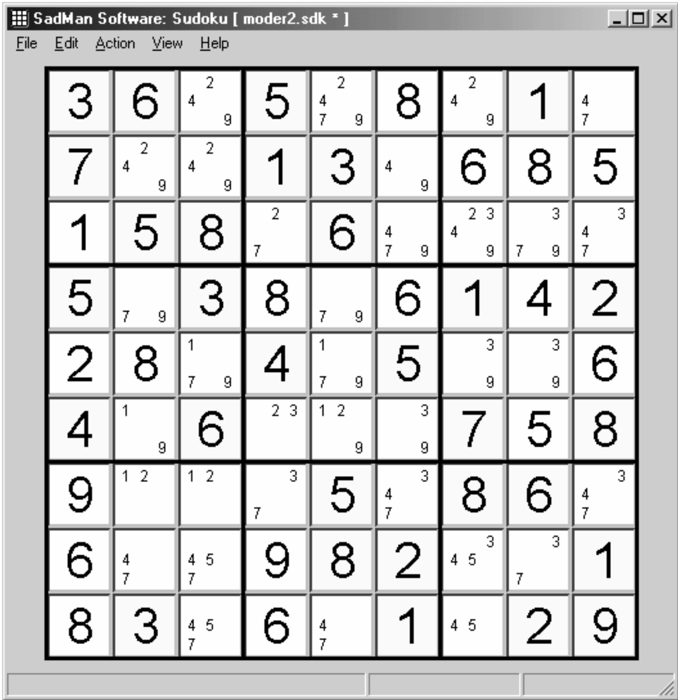


Če pa pogledamo tale kvadrat, opazimo, da se pojavita števili 1 in 2 izključno v dveh celicah. To pomeni, da lahko ostale kandidate v teh dveh celicah izločimo. Seveda bi *tehniko izključne podmnožice* uporabili tudi s tremi števili v treh celicah ali pa v vrstici oziroma stolpcu.

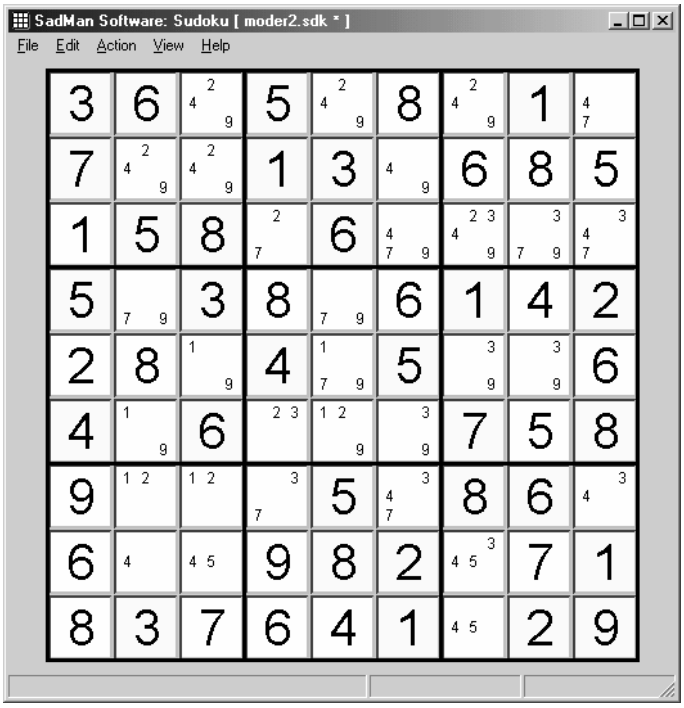
IZKLJUČITVE STOLPCEV/VRSTIC/BLOKOV

Poglejmo peti kvadrat in položaj sedmice v njem. Ker sta ostali samo še dve možnosti, je ne moremo določiti, pač pa z gotovostjo vemo, da je sedmica v tem kvadratu v srednjem stolpcu in s tem izloči sedmico kot kandidata iz drugega in osmega kvadrata (1,5) ter (9,5).

Ko postavimo sedmico v (9,5), lahko z isto logiko izločimo sedmico iz devetega kvadrata (7,9) in ostane samo še možnost, da je sedmica na (8,8).



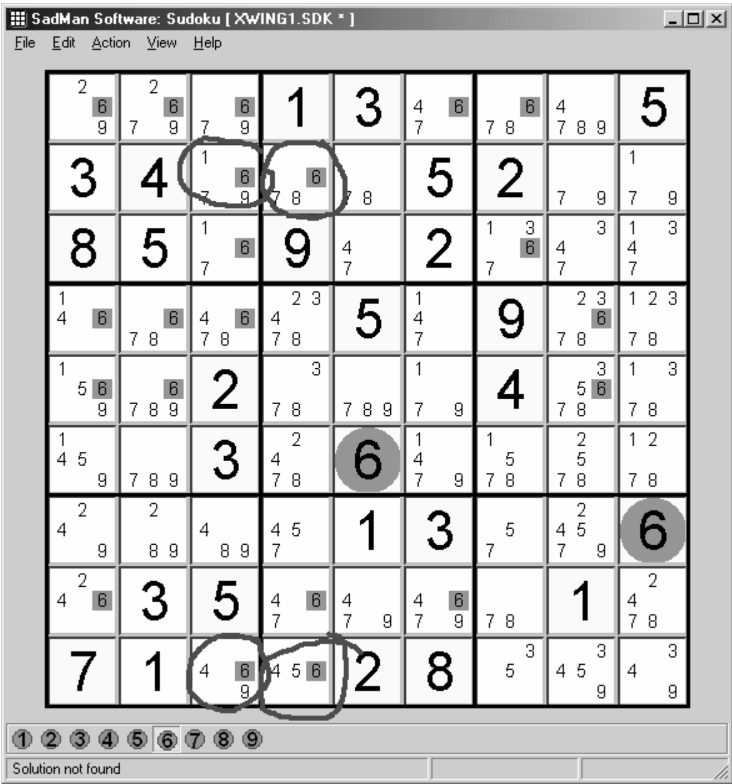
To pa že praktično reši uganko in preostanek se podre kot domine.



TEŽJI PRIMERI

Pravokotnik (X-Wing)

Poglejmo desni primer in opazujmo šestice v vogalih namišljenega pravokotnika, ki ga lociramo tako, da v ustreznih vrsticah (ali pa stolpcih) nima šestic med kandidati.

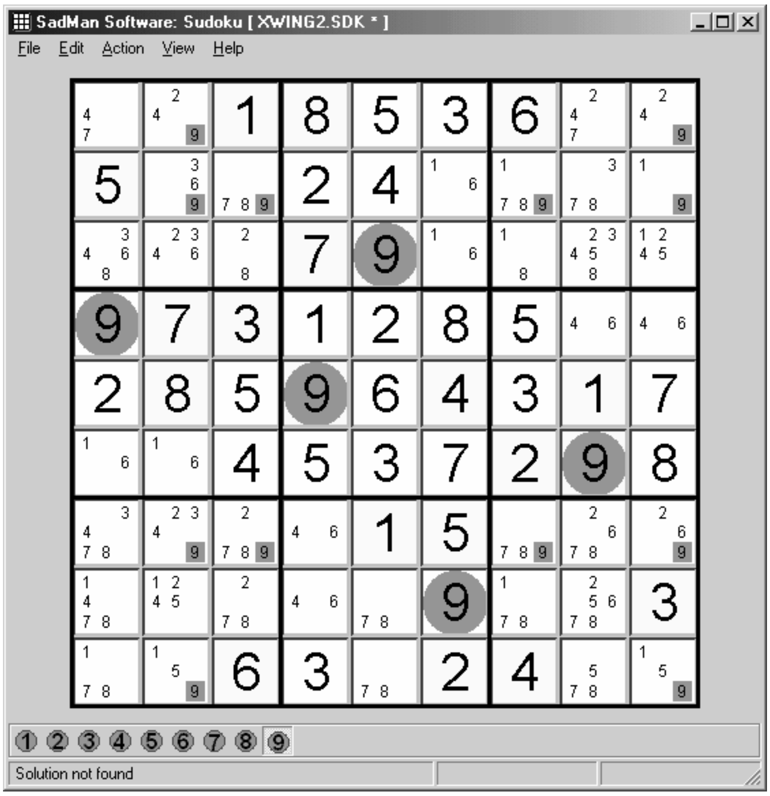


Na označenih mestih sta natančno dve šestici, lahko sta zgoraj levo in spodaj desno ali pa zgoraj desno in spodaj levo.

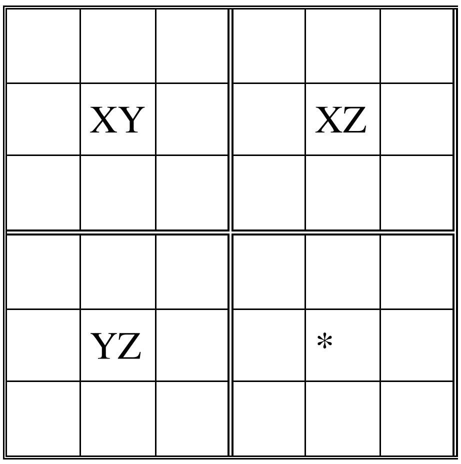
Shematično je šestica A ali B, v vsakem primeru pa jo lahko izločimo iz kandidatov na mestih označenih z zvezdico. Na mestih, označenih s črtico, pa ne sme biti šestic.

		*	*					
-	-	A	B	-	-	-	-	-
		*	*					
		*	*					
		*	*					
		*	*					
		*	*					
		*	*					
-	-	B	A	-	-	-	-	-

Za vajo poiščite *pravokotnik* z devetko.



Štirikotnik (XY-Wing)



V označenih celicah *štirikotnika* sta možna samo po dva kandidata. Kaj lahko sklepamo o celici z zvezdico?
* Če XY = X, potem XZ = Z, torej
* ne more biti Z.
* Če XY = Y, potem YZ = Z, torej
* ne more biti Z.
V vsakem primeru lahko v celici z zvezdico izločimo Z izmed kandidatov.

Vzorec pa je lahko tudi precej bolj splošen, le XY in XZ ter XY in YZ morajo biti povezani v isti enoti (vrstici, stolpcu ali bloku).

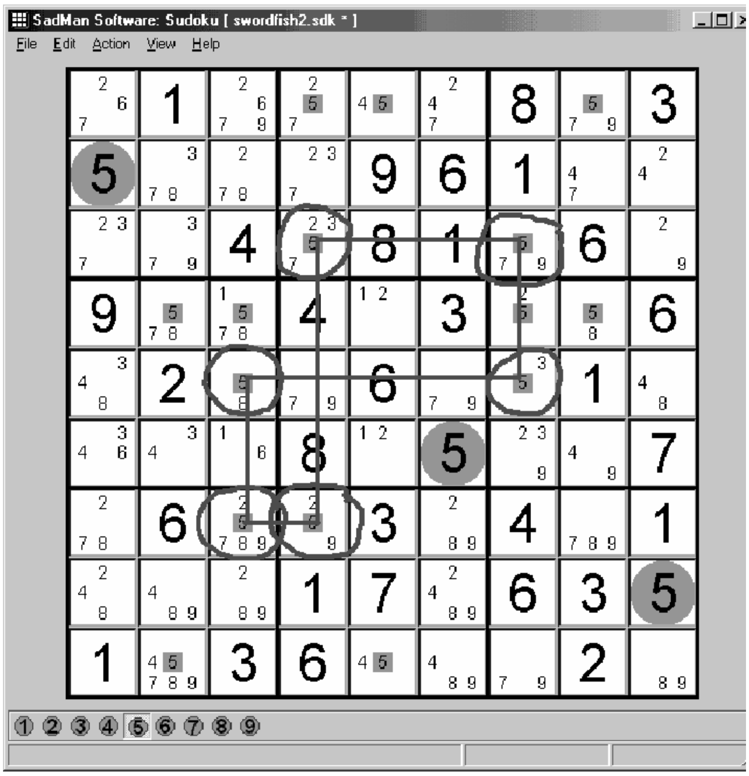
*	*	XY		XZ	
YZ			*	*	*

Na nobenem mestu, označenem z *, ne more biti Z.

In kako smo zaslutili, kje iskati štirikotnik?

Pravokotni mnogokotnik (Swordfish)

Če posplošimo tehniko pravokotnika iz štirih oglišč na več (šest, osem) oglišč, dobimo *tehniko pravokotnega mnogokotnika*. Poglejmo desno uganko in označene petice.

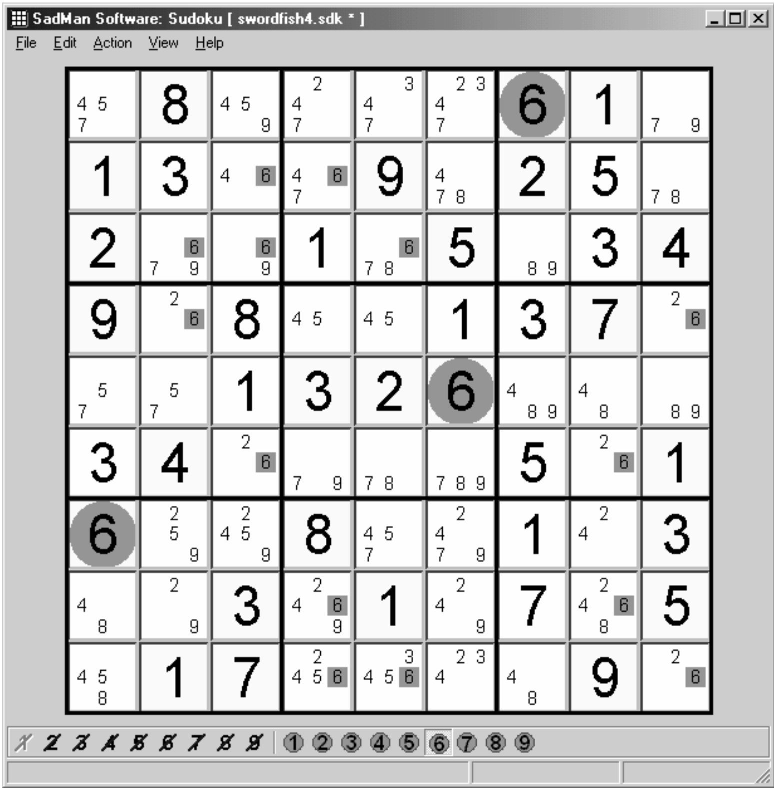


Vsaka od treh vrstic (tretja, peta in sedma) vsebuje natanko eno petico na označenih (obkroženih) poljih, zaradi povezave pa tudi vsak od treh stolpcev (tretji, četrti in sedmi) vsebuje natanko eno petico na označenih poljih. Sklep: drugje v teh stolpcih lahko črtamo petico s seznama kandidatov.
Shematično so petice na mestih A ali pa B, v vsakem primeru pa jo lahko izločimo iz kandidatov na mestih, označenih z zvezdico.

Na mestih, označenih s črtico, pa ne sme biti petic. Stolpci in vrstice lahko seveda svojo vlogo zamenjajo. Verjetno pa že slutite, da prepoznavanje takihle vzorcev v uganki, polni številk, ni več mačji kašelj!

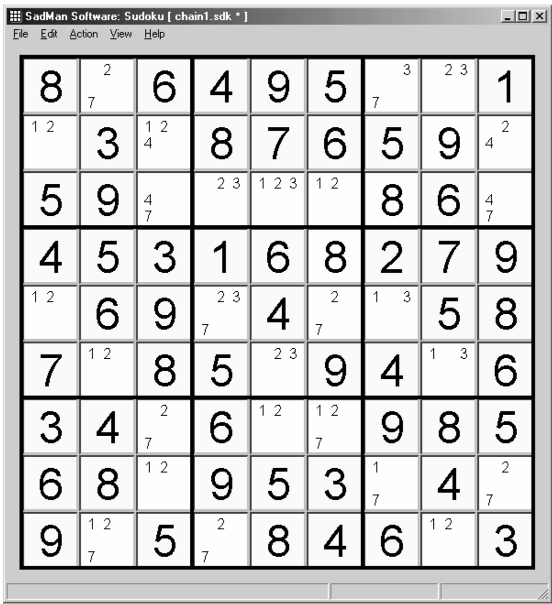
		*	*			*		
		*	*			*		
-	-	*	B	-	-	A	-	-
		*	*			*		
-	-	A	-	-	-	B	-	-
		*	*			*		
-	-	B	A	-	-	*	-	-
		*	*			*		
		*	*			*		

Za vajo poiščite pravokotni mnogokotnik s šesticami.



Rešitev: Oglišča *pravokotnega mnogokotnika* so na (2,3)(6,3)(2,4)(8,4)(6,8)(8,8),šestico lahko izločimo izmed kandidatov v (3,3)(9,4), kar posledično določi število v (3,3)=9.

Zaporedje (forcing chains)



Celica (1,2) ima kandidata {2,7}. Poglejmo tole *zaporedje* sklepov:

* če (1, 2) = 2, potem (2, 1) = 1 in (5, 1) = 2
* če (1, 2) = 7, potem (1, 7) = 3, in (5, 7) = 1, in (5, 1) = 2

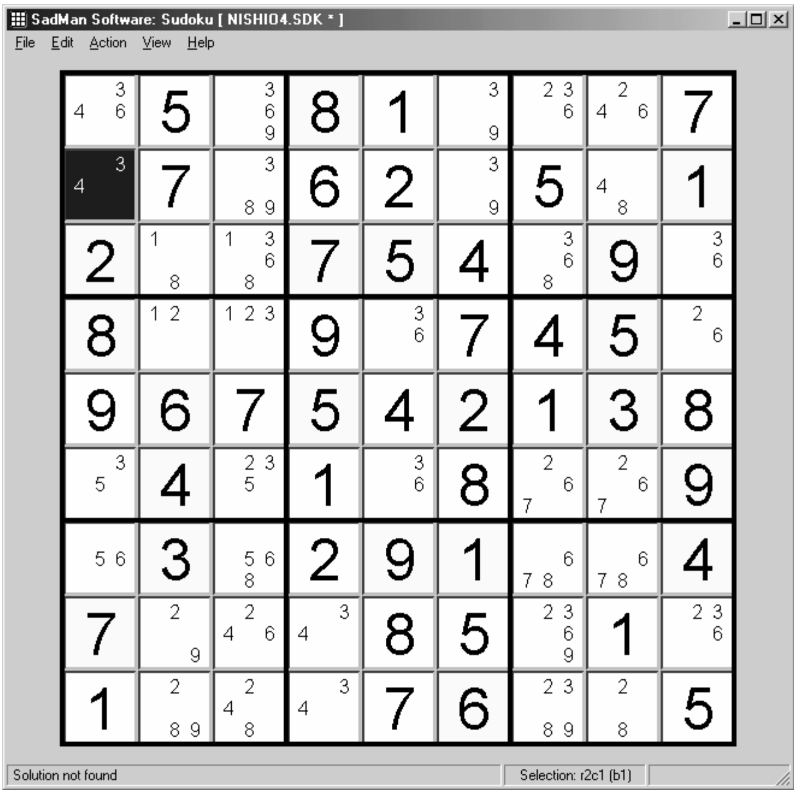
Torej, ne glede na to, katero izmed dveh poti uberemo, je v celici (5, 1) vrednost 2. In kako smo zaslutili, kje iskati zaporedje? Tu bi bil na mestu nasvet, da iščemo več celic z natančno dvema kandidatoma.

TEŽKA KATEGORIJA

Kaj nam ostane, ko uganke nismo uspeli rešiti z do sedaj opisanimi metodami ali pa nismo uspeli najti ustreznih vzorcev? Odgovor je univerzalna metoda, uporabna za najtežje primere: metoda vračanja. V tujih virih o sudokuju ji rečejo Nishio ali pa Trial and Error, računalnikarji pa to pogosto uporabljeno tehniko imenujejo vračanje (backtracking).

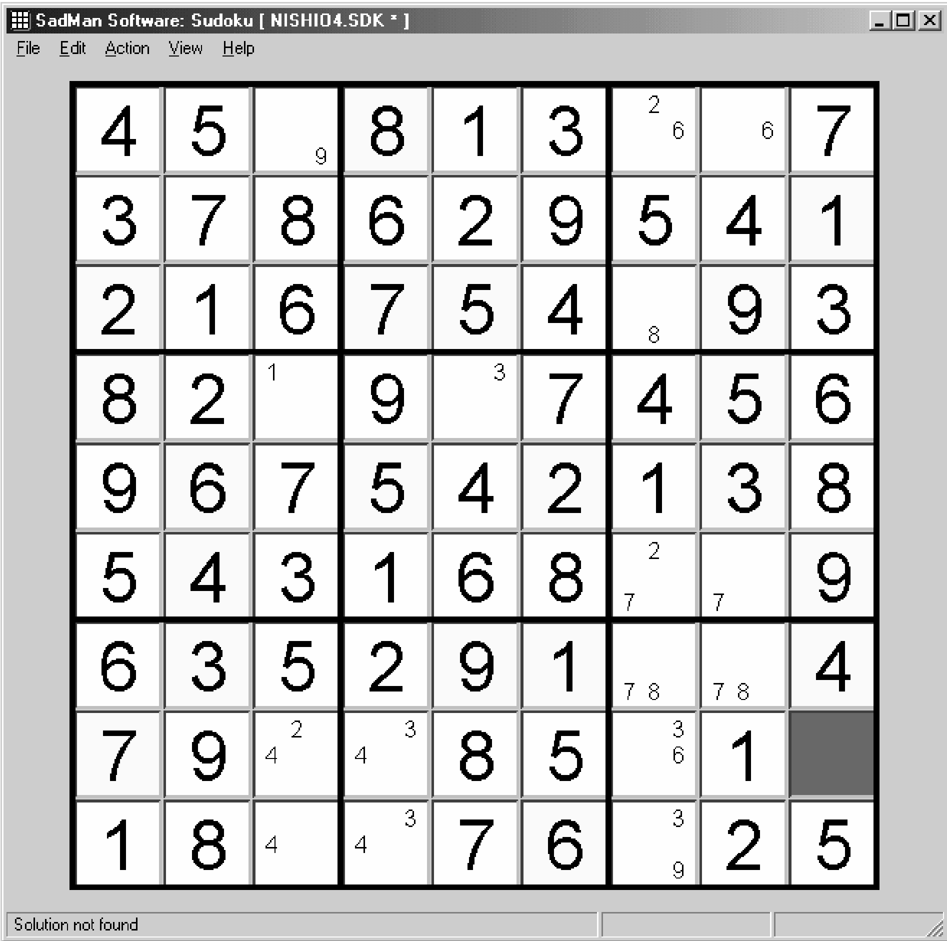
Vračanje (Nishio, Trial and Error)

Poglejmo si delno rešeno uganko. Tukaj odpovedo vse omenjane tehnike, zato poskusimo *vračanje*. Enega od možnih kandidatov predpostavimo kot "pravilnega".



Običajno, a ne nujno, ga poiščemo tam, kjer sta le še dva možna kandidata. Nato skušamo zadevo rešiti z dosedanjimi tehnikami. Če uspemo, toliko bolje, sicer pa podremo rešitev do točke ugibanja in izberemo naslednjega kandidata.

Na označenem polju smo se med 3 in 4 odločili za trojko in po nadaljevanju prišli do naslednjega rezultata:



V zadnjem stolpcu manjka na zatemnjenem polju samo še dvojka, ki pa je že v devetem kvadratu in prišli smo do protislovja! Podremo nazaj in sedaj vemo, da je v celici (2,1) = 4, poskusimo znova in tokrat rešimo nalogo brez zapletov.

V najbolj zapletenih ugankah se nam lahko primeri, da se po predpostavki zopet ustavimo. Tedaj gremo (rekurzivno) nazaj na točko *vračanje*, spet izberemo kandidata … in tako do bridkega konca.

Nekako tako se da znajti tudi v nekaterih labirintih, seveda moramo imeti možnost, da si označimo ali zapomnimo, na katerem križišču smo kam zavili. Ariadna je Tezeju, ko je iskal Minotavra, v ta namen posodila dolgo nit.

Andrej Jakobčič

Nagradna logična naloga

	1	5				4		8
6					8	3		9
4	3		5		9	1		7
	4					7	9	
	7		3		2	5		4
			4	7				
8	5		7	2		9		
	6	2	9		4		7	
7			8					1

Rešite sudoku in ga do 20. marca 2006 pošljite na naslov *Logika in razvedrilna matematika, Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik*. Med pravilnimi rešitvami bomo izžrebali tri dobitnike nagrad!

DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ LOGIKE

(Nadaljevanje s prejšnje številke)

3. IN 4. LETNIK

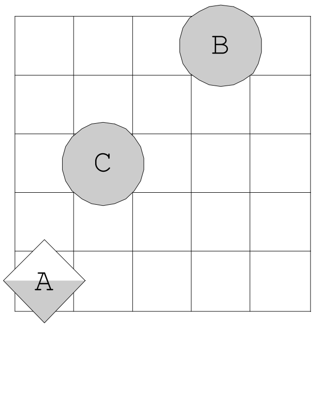
4. NALOGA

Ugotovi verjetnost danih izjav v dveh situacijah!
Krog pomeni, da ne poznamo oblike, ki je lahko trikotnik, kvadrat ali petkotnik. Pol siv lik pomeni, da ne poznamo barve, ki je lahko bela ali siva.
V(P in Q)=V(P)V(Q), če sta P in Q neodvisna stavka. Lastnosti različnih likov so neodvisne. Tudi barva, oblika in velikost istega lika so neodvisne.
V(P ali Q)=V(P)+V(Q)-V(P in Q).
V(Ni P)=1-V(P).

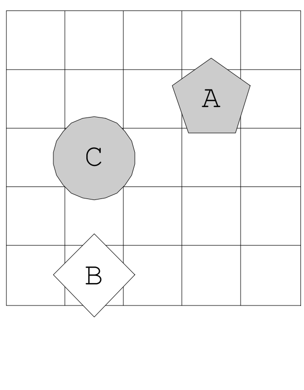
1. Lik C je bel.
2. Lik A ni kvadrat.
3. Lik B je bel kvadrat.
4. Lik B je bel ali petkotnik.
5. Lik B je bel ali pa ni trikotnik.
6. Lik C je bel, vendar ni kvadrat.
7. Lik A ni siv ali pa je petkotnik.
8. Lik C ni bel ali pa je petkotnik.
9. Lik A ni niti bel niti petkotnik.
10. Lik B ni niti bel niti petkotnik.
11. Lik A je bel ali lik B je siv.
12. Lik B je kvadrat in lik C je petkotnik.
13. Lik C je bel ali lik B ni kvadrat.
14. Lik C je petkotnik, lik B pa ni petkotnik.
15. Lik B ni siv, lik A pa je kvadrat.
16. Lik C ni petkotnik ali pa lik A je kvadrat.
17. Lik B ni siv in lik C ni petkotnik.
18. Lik C ni kvadrat ali pa lik B ni trikotnik.
19. Lik A je kvadrat ali lik A je siv ter lik C je trikotnik.
20. Lik C je petkotnik ali lik A je trikotnik ter lik A je bel.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2																				

1. situacija



2. situacija



5. NALOGA

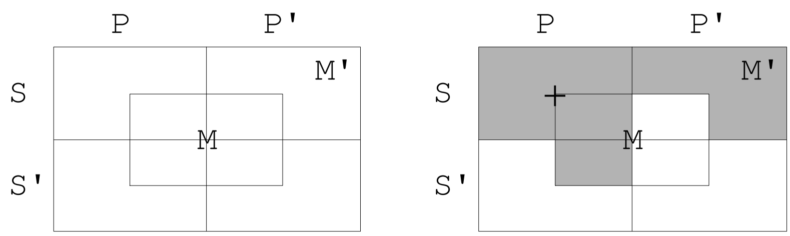
Silogizmi

Račun imen proučuje odnose med t.i. *kategoričnimi* stavki. Te delimo na:
1) *splošno trdilne*, ki imajo obliko »Vsak S je P.«
2) *delno trdilne*, ki imajo obliko »Vsaj en S je P.« (Nekateri S so P.)
3) *splošno nikalne*, ki imajo obliko »Noben S ni P.« (Ne obstaja S, ki je P.)
4) *delno nikalne*, ki imajo obliko »Vsaj en S ni P.« (Nekateri S niso P.)
Imeni ali termina S in P imenujemo *subjekt* in *predikat* stavka.
V računu imen se uporabljajo naslednji zapisi kategoričnih stavkov:

S a P ≡ Vsak S je P.
S i P ≡ Vsaj en S je P.
S e P ≡ Noben S ni P.
S o P ≡ Vsaj en S ni P.

Silogizmi so pravila sklepanja, v katerih iz dveh kategoričnih stavkov (*predpostavk* ali *premis*) logično sledi tretji kategorični stavek (*zaključek* ali *sklep*).
Sklep ima obliko S x P, S je subjekt in P predikat. Prva predpostavka ima obliko P y M ali M y P, druga pa S z M ali M z S. Termin M nastopa v obeh predpostavkah, imenuje se *srednji* termin.
Kako ugotovimo pravilnost oz. nepravilnost silogizma? Oglejmo si silogizem:

M e P
S a M
S e P

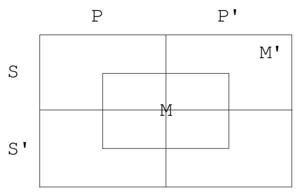


Reči z lastnostjo M predstavljajo točke, ki so blizu sredine, točke proti robu pa predstavljajo reči, ki nimajo lastnosti M. Tako je pogovorno področje razdeljeno na 8 delov. Levo so točke, ki predstavljajo reči z lastnostjo P, zgoraj so točke, ki predstavljajo lastnost S …
To, da noben M ni P, označimo tako, da osenčimo (izpraznimo) tiste M, ki so v P.
To, da vsak S je M, označimo tako, da izrežemo tiste S, ki so v M´.
Pravilnost silogizma pomeni, da ni možno, da sta premisi resnični, zaključek pa neresničen.
Negacija zaključka S e P, to je, da noben S ni P, je obstaja S, ki je P, to je S i P. Na področje SP postavimo +. Zdaj zberemo vse tri diagrame skupaj. Diagram hkrati zahteva, da področje SP ni prazno (+) in da je prazno (osenčenje). To je seveda protislovje. Zato je zgornji silogizem pravilen. Če je silogizem nepravilen, potem lahko najdemo protiprimer (diagram ni protisloven).

Z diagrami izpelji pravilnost oz. nepravilnost silogizmov!

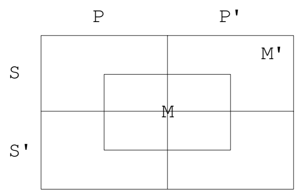
1.
M e P
S e M

S i P



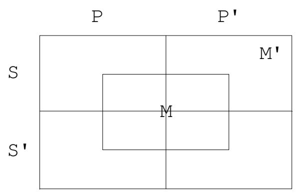
2.
P e M
S i M

S a P



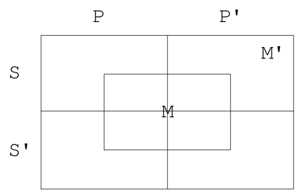
3.
M a P
M i S

S i P



4.
P e M
M a S

S o P



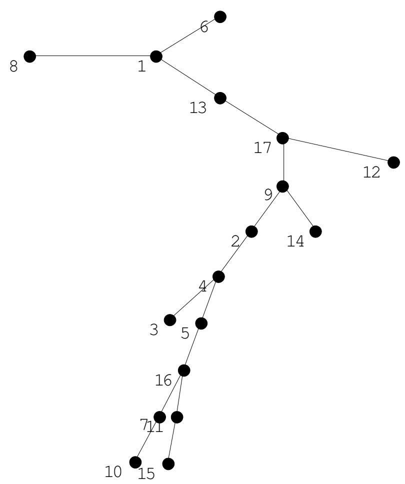
Rešitve državnega tekmovanja

REŠITVE ZA 5. IN 6. RAZRED

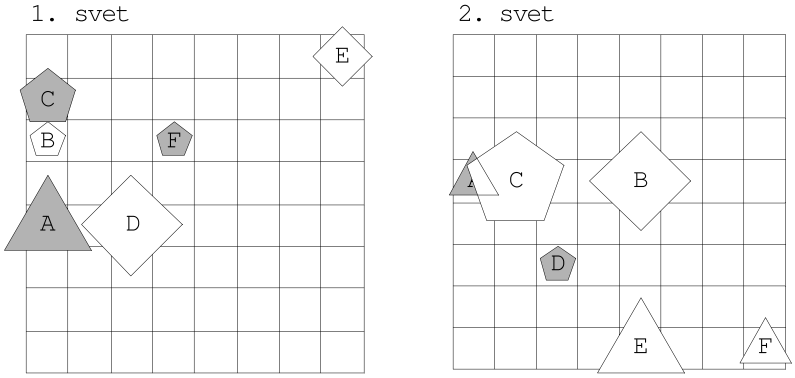
1.
Število x=4.
Ker je resnična le ena izmed izjav A in ena izmed izjav B, x ne morejo biti števila, ki se v izjavah A oz. v izjavah B pojavijo večkrat: 11, 3, 10, 13,14. Iskano število mora biti v obeh množicah {4, 5, 7, 1, 9} in {4, 6, 8}, torej je to število 4.

2.
Odgovor: Bor. Osebe označimo s številkami in narišimo graf. Oseba 2 je v sredini grafa.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	R
4	0	2	1	2	5	4	5	1	5	4	3	3	2	5	3	2



3.



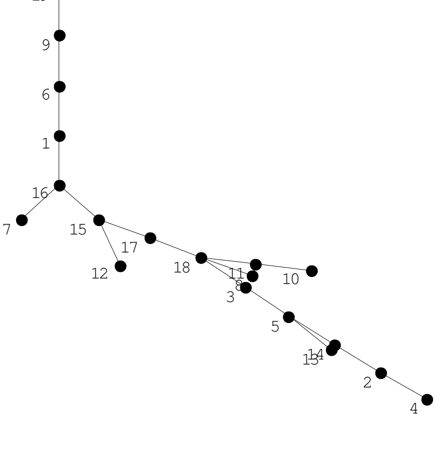
4.
Imel je črno kapo. Gotovo nista imela dva soseda belih kap, saj bi v sicer učenec, ki sedi nasproti, takoj vedel, da ima črno kapo (10 točk). To pomeni, da sta dve črni kapi sosednji in to nasproti črni kapi, saj je edini možni razpored B, Č, B, Č, Č. Tisti učenec, ki je videl dve črni kapi, je vedel, da ima tudi sam črno kapo (še 10 točk).
Ali lahko še kdo drug ugotovi barvo kape, če ve, da sta samo dve črni kapi skupaj?
Ne. Zaradi simetrije, lahko obravnavamo le dva primera. Če vzamemo 4. učenca, bi bila situacija lahko tudi B, Č, Č, B, Č in ne more vedeti, kakšno kapo ima Kar se tiče 3. učenca, bi bila situacija lahko tudi B, Č, Č, B, Č. Podobno velja tudi za 1. in 5. (še 10 točk).

REŠITVE ZA 8. IN 9. RAZRED

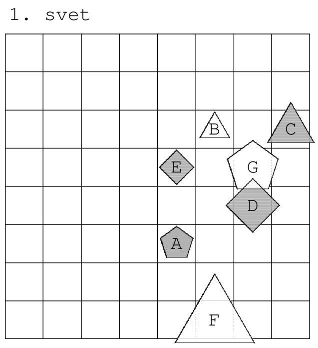
1.
Da bo resnična natanko ena izmed izjav A, se mora število x v prvih petih izjavah pojaviti natanko enkrat. Enak sklep velja za druge 4 izjave. Edino tako število je 15.

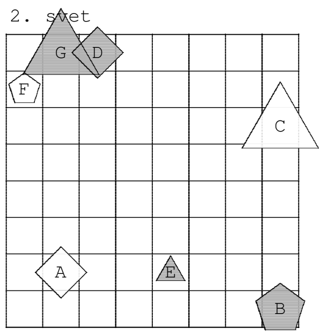
2.
Dolžina najdaljše poti med dvema osebama je 13, na sredini te poti je Pal.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	MA	MI	N	O	P	RI	RO
3	5	2	6	3	4	3	2	5	3	2	2	4	4	1	2	0	1	6



3.





4.
Če bi kdo od učencev videl 3 bele ali 4 črne kape, bi takoj vedel, da ima sam črno (oz. belo) kapo. Predpostavimo, da nekdo vidi tri črne kape skupaj. Potem vidi tisti v sredini teh treh vse bele in ve, da ima črno kapo. Torej se črne kape (enako bele) lahko pojavijo le kot dve sosednji. (10 točk). Takšna je situacija po prvem odkimavanju. Zdaj vsi vedo, da se le po dve kapi enake barve pojavljata kot sosednji.
Recimo, da imamo dve sosednji beli kapi. Ob njiju sta dve črni. Učenec, ki je nasproti obeh belih, razmišlja takole. Če ima eden od mojih sosedov belo, bo drugi sosed videl tri bele. ker pa se ni oglasil, imam belo jaz. To bi bilo možno. Vendar se nihče ni oglasil po drugem vprašanju. (10 točk).
Torej vsi vedo, da ne obstajata dve sosednji beli kapi. To pomeni, da imamo natanko dve sosednji črni kapi, ostale pa alternirajo. Vsi, ki vidijo 2 črni kapi, torej poznajo barvo svoje kape. Taki so trije – učenec nasproti dveh črnih (ki je torej bel) in njegova soseda (ki sta črna). Zakaj pa ostali 4 ne morejo ugotoviti barve kape? Recimo, da so kape razporejene B, Č, B, Č, B, Č, Č. Zaradi simetrije je dovolj, če obravnavamo le 5. in 6. učenca. Kar se tiče petega, bi bila situacija lahko B, Č, B, Č, Č, B, Č. In enako velja za 6. učenca. (10 točk).

REŠITVE ZA 1. IN 2. LETNIK

1.
$A1\cap A2\cap A3\cap A4\cap A5=\emptyset$, medtem ko, če katerokoli od teh množic Ai spustimo, pride presek preostalih neprazen. Torej so preseki neprazni tudi, če spustimo 2 ali več množic A.
$A1\cap A2\cap A3\cap A4=\{4\}$, $A1\cap A2\cap A3\cap A5=\{16\}$, $A1\cap A2\cap A4\cap A5=\{7\}$, $A1\cap A3\cap A4\cap A5=\{1\}$, $A2\cap A3\cap A4\cap A5=\{8\}$.
Seveda so preseki manjšega števila množic zagotovo neprazni.

2.
Popraviti je treba 8 linij. V naslednjem seznamu __ pomeni dobro linijo, --- pa linijo, ki jo moramo popraviti, da bo iskana povezava delovala.

```
20---15__23---25---4---13---12---6---19---24
20---15__23---25---4---13---12---6__5---17__19---24   →
20---15__23---25---4---13---12---10__22---19---24
20---15__23---25---4---13---12---18__1---17__19---24
```

Diagram:

```
      {20}
       |
    {15,23}
       |
      {25}
       |
      {4}
       |
      {13}
       |
      {12}
     /  |  \
{22,10}{5,6}{18,1}
     \  |  /
    {17,19}
       |
      {24}
```

3.
Mogoče se vam zdi čudno, da v prvem krogu ne rečejo vsi logiki izjave A, ampak naslednji tekst vas bo že prepričal.
Če bi bili le 2 beli kapi, recimo {2, 4}, potem bi 4. logik razmišljal takole: »2. logik se ni izjasnil, torej je moral videti vsaj eno belo kapo. Ker jaz

vidim le njegovo belo kapo, je moral videti mojo belo kapo.« In bi 4. logik dal izjavo C.
Podobno gre zgodba naprej, če imamo 3 bele kape {2, 4, 9}. 2. in 4. logik se ne izjasnita, zato pa 9. logik razmišlja takole: »4. logik se ni izjasnil, torej je poleg bele kape 2. logika videl vsaj še eno belo kapo. Ker vidim le beli kapi 2. in 4. logika, jo moram imeti tudi sam.« In tako da 9. logik izjavo C. Vsi ostali za njim pa dajo izjavo B (ker ugotovijo, da morajo imeti črno kapo, sicer se 9. logik ne bi mogel izjasniti).
V naslednjem krogu, da lahko izjavo C 4. logik, vsi ostali za njim, ki se še niso izjasnili, pa dajo izjavo B. V tretjem krogu se z izjavo D izjasni še 2. logik. Tako 1. logik v četrtem krogu ugotovi, da nima bele kape. Glej tabelo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	A	A	A	A	A	A	A	A	C	B	B	B	B
2	A	A	A	C	B	B	B	B					
3	A	D	B										
4	B												
5													

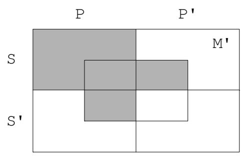
4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	0

5.

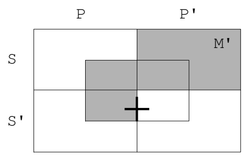
1.
M e P
S e M

S i P



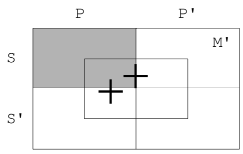
3.
M e P
M o S

S o P



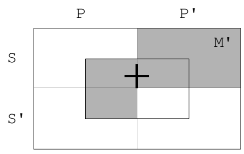
2.
P i M
S i M

S i P



4.
P e M
M i S

S o P



Pravilen je samo 4. silogizem.

REŠITVE ZA 3. IN 4. LETNIK TER ŠTUDENTE

1.
$A1\cap A2\cap A3\cap A4\cap A5\cap A6\cap A7=\emptyset$, medtem ko, če katerokoli od teh množic Ai spustimo, je presek preostalih neprazen. Torej so preseki neprazni tudi, če spustimo 2 ali več množic A.
$A1\cap A2\cap A3\cap A4\cap A5\cap A6=\{8\}$, $A1\cap A2\cap A3\cap A4\cap A5\cap A7=\{3\}$, $A1\cap A2\cap A3\cap A4\cap A6\cap A7=\{9\}$, $A1\cap A2\cap A3\cap A5\cap A6\cap A7=\{4\}$, $A1\cap A2\cap A4\cap A5\cap A6\cap A7=\{5\}$, $A1\cap A3\cap A4\cap A5\cap A6\cap A7=\{10\}$, $A2\cap A3\cap A4\cap A5\cap A6\cap A7=\{6\}$.
Seveda so preseki manjšega števila množic zagotovo neprazni.

2.

Popraviti je treba 5 linij. V naslednjem seznamu __ pomeni dobro linijo, --- pa linijo, ki jo moramo popraviti, da bo iskana povezava delovala.

```
13---5__11__15---9__4__2---12---10---14
13---5__11__15---9__20__21__17---3---10---14
13---5__11__15---9__20__21__17__6---12---10---14
13---5__11---17---3---10---14
13---5__11---17__6---12---10---14
13---18__15---9__4__2---12---10---14
13---18__15---9__20__21__17---3---10---14
13---18__15---9__20__21__17__6---12---10---14
13---18__15__11---17---3---10---14
13---18__15__11---17__6---12---10---14
```

Diagram:

```
        {13}
          |
    {5,11,15,18}
          |
{2,4,9,20,21,17,6}
         \ /
      {12}{3}
         \ /
        {10}
          |
        {14}
```

3.

Mogoče se vam zdi čudno, da v prvem krogu ne rečejo vsi logiki izjave A, ampak naslednji tekst vas bo že prepričal.

Če bi bili le 2 beli kapi, recimo {2, 4}, potem bi 4. logik razmišljal takole: »2. logik se ni izjasnil, torej je moral videti vsaj eno belo kapo. Ker jaz vidim le njegovo belo kapo, je moral videti mojo belo kapo.« In bi 4. logik dal izjavo C.

Podobno gre zgodba naprej, če imamo 3 bele kape {2, 4, 8}. 2. in 4. logik se ne izjasnita, zato pa bi 8. logik razmišljal takole: »4. logik se ni izjasnil, torej je poleg bele kape 2. logika videl vsaj še eno belo kapo. Ker jaz vidim le beli kapi 2. in 4. logika, jo moram imeti tudi sam.« In tako bi 8. logik dal izjavo C.

No, sedaj pa naš primer, ko imamo 4 bele kape {2, 4, 8, 11}. Ko 11. logik opazi, da se 2., 4. in 8. logik niso zjasnili in vidi, da vsi nadaljnji logiki nimajo belih kap, pravilno ugotovi, da ima sam belo kapo in da izjavo C. Vsi ostali za njim pa dajo izjavo B (ker ugotovijo, da morajo imeti črno kapo, sicer se 11. logik ne bi mogel izjasniti).

V naslednjem krogu, da izjavo C 8. logik, vsi ostali za njim, ki se še niso izjasnili, pa dajo izjavo B. V tretjem krogu se z izjavo C izjasni 4. logik, v še naslednjem pa se z izjavo D izjasni 2. logik. Tako 1. logik v petem krogu ugotovi, da nima bele kape. Glej tabelo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	C	B	B	B	B
2	A	A	A	A	A	A	A	C	B	B					
3	A	A	A	C	B	B	B								
4	A	D	B												
5	B														
6															

4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	0	1	0	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
2	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0

5.

Pravilen je samo 3. silogizem.