VSEBINA

Nagrajenci nagradne logične naloge

Izžrebali smo tri nagrajence, ki bodo po pošti prejeli nagrade:
- **Matej Zorjan**, 2221 Jarenina
- **Valentina Petan**, 8256 Sromlje
- **Oliver Ocvirk**, 3270 Laško
- **Sandra Olenik**, 6255 Prem

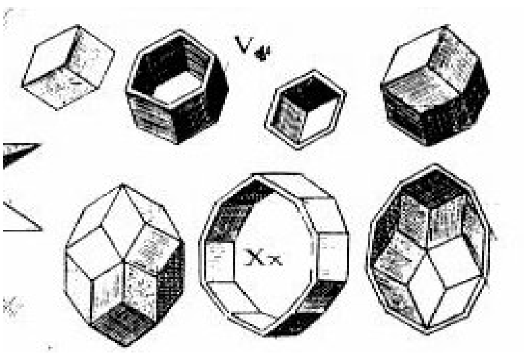
Izdaja: Založniško podjetje LOGIKA d.o.o., Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik.
Poslovni račun pri NLB: 02312-0016592829. **Davčna številka:** SI56917309.
Podjetje je obvezni zavezanec po zakonu o DDV.
Za izdajatelja: *Izidor Hafner*.
Telefon: (01)8314 915. **E-mail**: logika@siol.net.
Revija *Logika & razvedrilna matematika* je vpisana v register medijev pri Ministrstvu za kulturo pod številko 759.
Revijo *Logika in razvedrilna matematika* subvencionira Ministrstvo za šolstvo in šport.

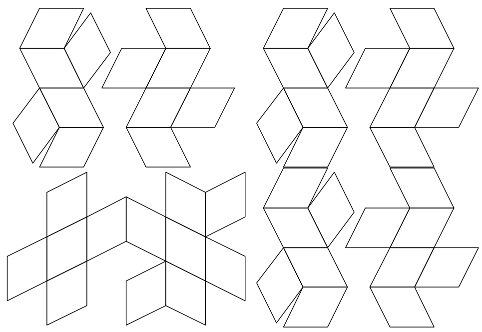
Glavni in odgovorni urednik: *dr. Izidor Hafner.* (http://torina.fe.uni-lj.si/~izidor)
Člana časopisnega sveta: *prof. dr. Tomaž Pisanski in Darjo Felda, prof.*
Sodelavci: *mag. Urša Demšar, dr. Gregor Dolinar, Petra Grošelj, Monika Kavalir,dr. Meta Lah, Boštjan Kuzman, Dragoljub M. Milošević, Teja Oblak, Hiacinta Pintar, Maja Pohar, mag. Katka Šenk in dr. Aleš Vavpetič.*
Oblikovanje: *Ana Hafner.* **Jezikovni pregled**: *Barbara Janežič Bizant*.
Strokovni pokrovitelj: Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko – oddelek za teoretično računalništvo.
Generalni sponzor: Marand d.o.o., Zastopstvo Borland.
Tisk: Tiskarna Littera picta, Rožna dolina c. IV/32-36, Ljubljana. **Naklada**: 900 izvodov.

ISSN 0354 – 0359
LOGIKA & RAZVEDRILNA MATEMATIKA
letnik XV, št. 5, 2005/2006
Cena revije: letna naročnina 3650 SIT (15.2 EUR, 8.5% DDV je vključen). Posameznih številk ne prodajamo.
Naročnina za posameznike velja do pisnega preklica

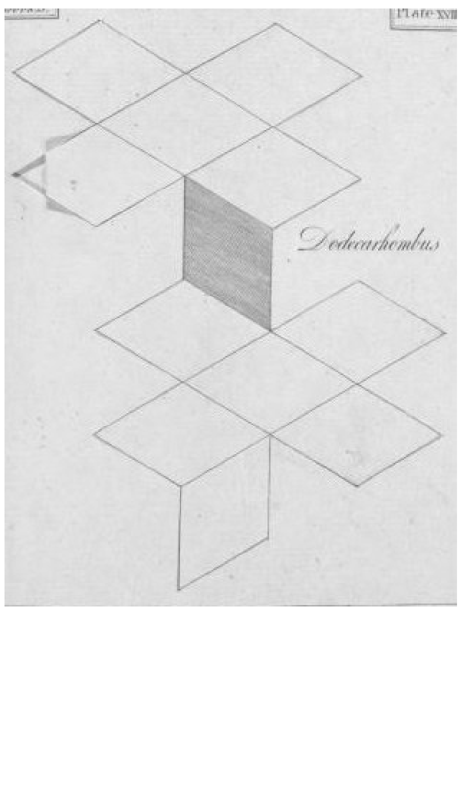
Rombski poliedri

Po navedbi iz [1, str. 156] je Kepler delil telesa s skladnimi mejnimi ploskvami na pravilna (platonska) in polpravilna (rombska) telesa. Poznal je dve telesi iz druge skupine. Prvo je omejeno z 12 rombi, pri katerih je razmerje med diagonalama kvadratni koren iz 2. Drugo telo sestoji iz 30 rombov, razmerje diagonal pa je zlati rez. Telesi se imenujeta *rombski dvanajsterec* (dodekaeder) in *rombski trideseterec* (triakontaeder).

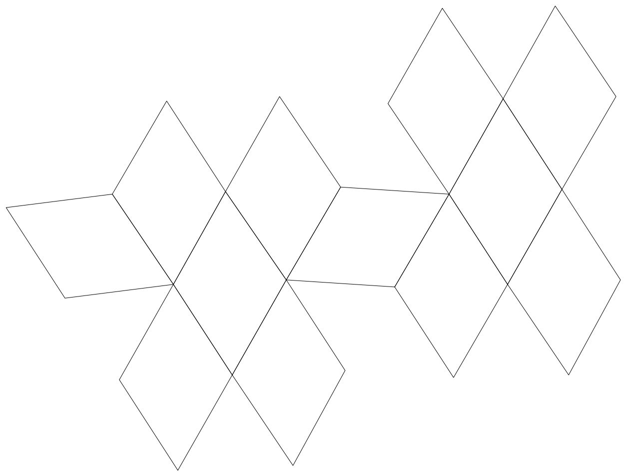




V delu *De Nive Sexangula* je opisal način, kako je prišel do teh teles. Zgornja slika je iz dela *Harmonices mundi* iz l. 1619. Zgornji del prikazuje izdelavo modela rombskega dvanajsterca, spodnji del pa predstavlja izdelavo triakontaedra iz treh delov. Vsak od teh delov ima 10 mejnih ploskev. Če zlepimo levi in desni del, bomo dobili *rombski dvajseterec* (ki ga je šele leta 1885 odkril Rus Fedorov). Vmesni del je Fedorov imenoval *zona* (in je ta pojem posplošil ter uvedel t. i. *zonoedre*).



Mi se bomo omejili samo na rombske poliedre, kjer je razmerje diagonal zlati rez. Obstaja samo 5 različnih konveksnih teles te vrste. Najprej sta tu dva *rombska šesterca* (paralelepipeda)– *koničasti* in *ploščati romboeder*, ki sta bila verjetno znana že pred Keplerjem. Zadnje telo je šele l. 1960 odkril Hrvat Stanko Bilinski, ko je dokončno obdelal vse možnosti za rombska telesa. Gre za rombski dvanajsterec metrično drugačen od Keplerjevega, kombinatorično pa je z njim enak. Bilinski je telo poimenoval *rombski dvanajsterec druge vrste*.



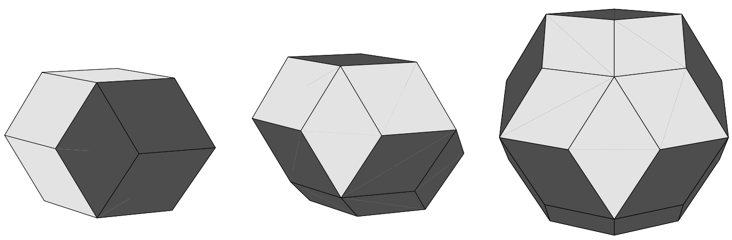
Bilinski je pokazal, da dobimo dvanajsterec iz dvajseterca, tako da izničimo en pas rombov ("cono" rombov), ki obkroža dvajseterec; če naredimo isto z dvanajstercem, dobimo romboeder.
Umetnik in matematik G. Hart je opozoril, da je našel mrežo rombskega dvanajsterca 2. vrste v Cowleyevi knjigi iz l. 1751, *Geometry made easy*. Omenjena mreža ima oznako *dodecarhombus* [6] (slika na prejšnji strani). Vendar pa to ni mreža rombskega dodekaedra 2. vrste. Iz te mreže se sploh ne da sestaviti konveksnega poliedera. Prava mreža je na zgornji sliki.

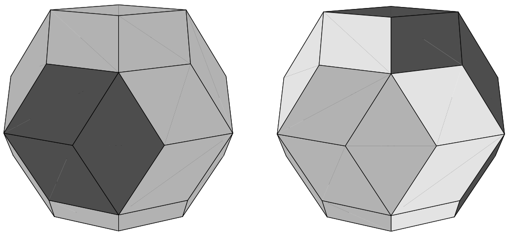
V prilogi so dane mreže ploščatega in koničastega romboedra in rombskega dodekaedra.

Naloge:

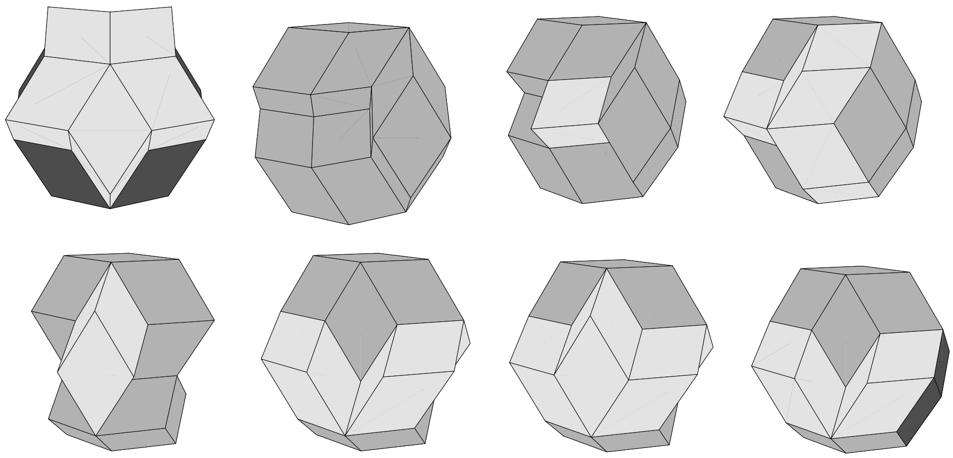
Vzemi 2 romboedra vsake vrste in izdelaj rombski dodekaeder.
Vzemi dodekaeder in 3 romboedre vsake vrste in izdelaj dvajseterec.
Vzemi dvajseterec in 5 romboedrov vsake vrste in izdelaj trideseterec. Koliko romboedrov potrebuješ za izdelavo trideseterca?
Iz treh dvanajstercev izdelaj trideseterec.
Vzemi dva dvanajsterca, naredi črko T in telo dopolni do trideseterca.

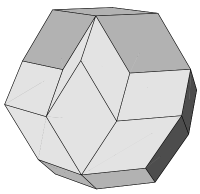
Rešitve:





Tule je nekaj vmesnih korakov pri izdelavi trideseterca.





Katera od teh teles imajo dvojno, trojno ali petkratno rotacijsko simetrijo? Ali imajo telesa zrcalne simetrije?
Obsežen članek o rombskih poliedrih je na voljo na medmrežju [4], [5].

Literatura:

[1] P.R.Cromwell: Polyhedra, Cambridge U. Press, 1997.
[2] I. Hafner, T. Žitko, B. Jurčič Zlobec, Gallery of rhombic polyhedra, Visual Mathematics, 2002
[3] I. Hafner, Tri zadatka o rompskom dodekaedru 2. vrste, Matematičko fizički list 1999-2000, str.11–12
[4] http\\torina.fe.uni-lj.si\~izidor\Delavnica\Delavnica.html
[5] http\\torina.fe.uni-lj.si\~izidor\RhombicPolyhedra\RhombicPolyhedra.html
[6] www.librarygatech.edu\about_us\mensuration\hystory.html

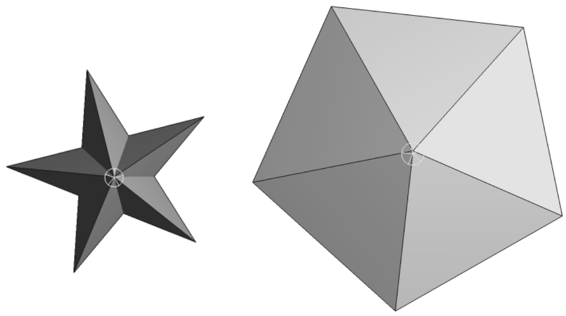
Rotacijska simetrija v prostoru

V običajnem življenju simetrija pomeni skladnost levega in desnega dela telesa, bolj natančno, dela sta zrcalni podobi drug drugega. V matematiki pomeni simetrija preslikavo telesa samega vase, pri čemer se slika ne razlikuje od originala. Rotacijska simetrija nam bo pomenila rotacijo telesa okoli neke osi, pri čemer se telo preslika samo vase.

Zanima nas, kakšni sistemi rotacijskih simetrij so mogoči. Izkaže se, da imajo poliedri lahko le spodaj opisane sisteme rotacijskih simetrij.

Ciklična simetrija (C)

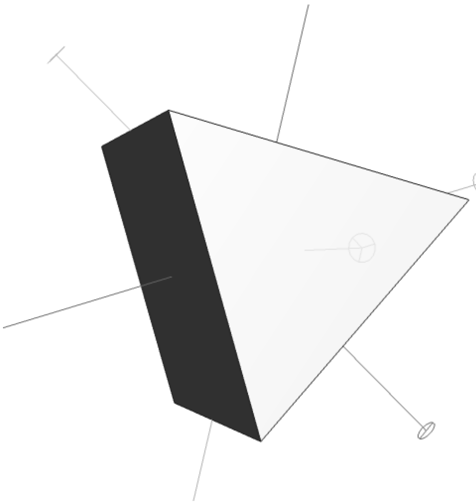
Najenostavnejši sistem rotacijske simetrije najdemo pri piramidah. Vzemimo petstrano (pravilno) piramido. Ima eno samo os simetrije, ki poteka po višini piramide.

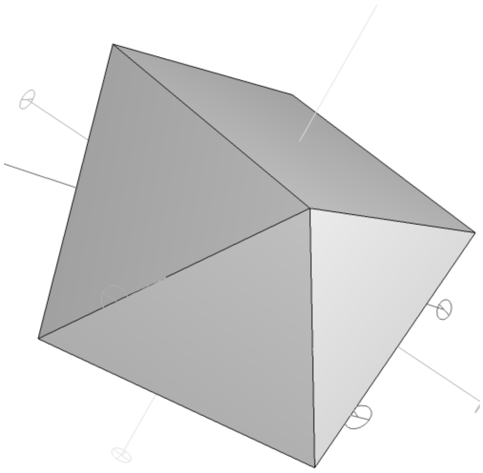


Slika prikazuje piramido, ki je položena na ravnino papirja. Piramido lahko zavrtimo za večkratnike kota 360/5=72 stopinj, to je za kote 72, 144, 216, 288 in 360 stopinj, kjer je zadnja simetrija identiteta. Ta piramida ima 5-kratno ciklično simetrijo, v simbolih C_5.
Če je osnovna ploskev pravilen n-kotnik (sem prištevamo tudi zvezdaste like), bomo rekli, da ima telo simetrijo C_n.

Diedrska simetrija (D)

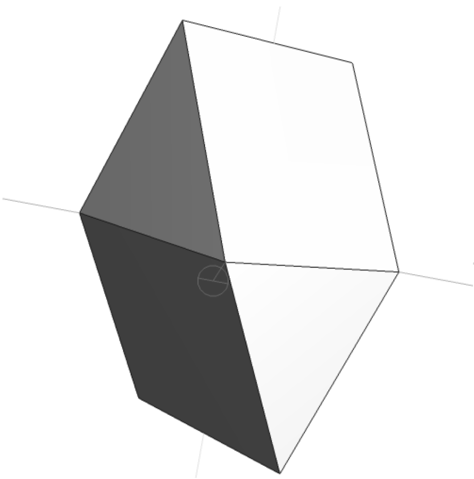
Vzemimo zdaj pravilno tristrano prizmo. Najprej imamo os 3-kratne rotacije, ki je pravokotna na osnovno ploskev. Prizmo lahko zavrtimo za kote 120, 240 ali 360 stopinj okoli te osi in se ne bo razlikovala od prvotne slike. Imamo pa tudi še tri osi 2-kratne simetrije (rotacije za kota 180 in 360 stopinj), ki so pravokotne na os trikratne simetrije, ki ji rečemo tudi glavna os. Točko, kjer os seka mejne ploskve, imenujemo *pol*. Vsaka os ima dva pola. Pri glavni osi sta pola sredini osnovnih trikotnikov in sta ekvivalentna (enake vrste). Pola osi 2-kratne simetrije pa sta različna. Eden je središče kvadrata (ali pravokotnika), drugi pa je sredina nasprotnega roba.

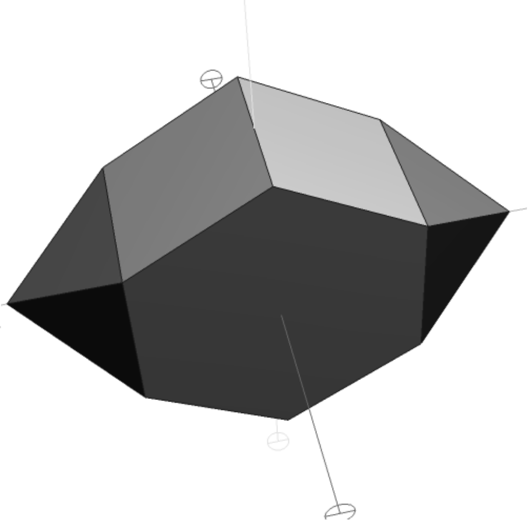




Osem 2-kratne simetrije pravimo *drugotne* (sekundarne osi). Omenjeni tip simetrije označimo z D_3 in je primer *diedrske* simetrije. V splošnem primeru prizme je osnovna ploskev pravilen n-kotnik, glavna os je os n-kratne simetrije. Poleg te imamo še n sekundarnih osi 2-kratne simetrije. Oznaka te simetrije je D_n. Te osi se razlikujejo, če je n sodo število. V tem primeru gredo ene osi skozi sredine stranskih ploskev, druge pa skozi sredine stranskih robov. Kako pa je, če je n liho število? Ta tip simetrije imajo tudi antiprizme.

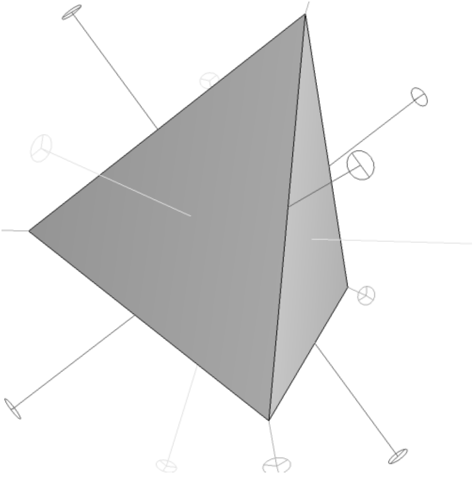
V primeru D_2 so vse osi med seboj enakovredne in nima smisla razlikovati med *glavno* osjo in sekundarnima osema. Primeri poliedrov s to simetrijo so na spodnjih slikah.

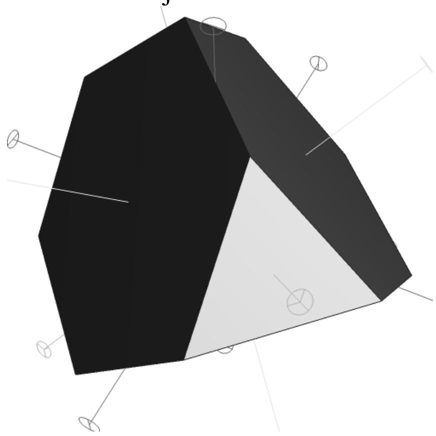




Simetrija četverca (tetraedrska simetrija T)

Pravilen četverec ima 7 rotacijskih osi, štiri 3-kratne in tri 2-kratne osi rotacije. Vsaka os 3-kratne simetrije gre iz enega oglišča do sredine nasprotne mejne ploskve. Osi 2-kratne simetrije potekajo skozi sredine nasprotnih robov.
Ta tip simetrije se imenuje *simetrija četverca* in se označuje s T.

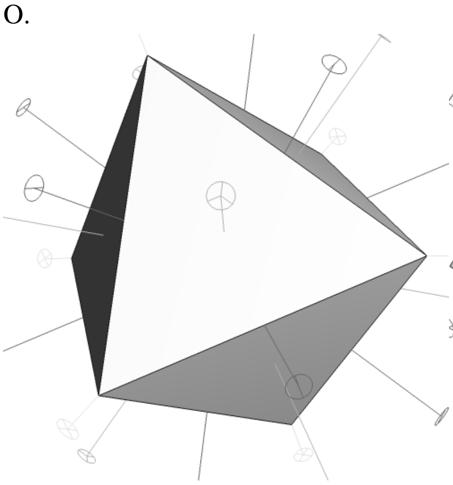


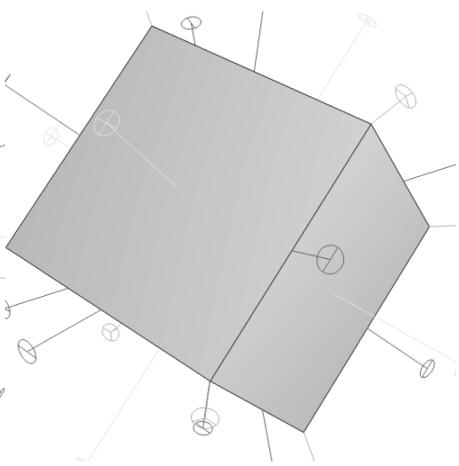


Tak tip simetrije ima tudi prisekani četverec.

Simetrija osmerca (O)

Pravilni osmerec (oktaeder) ima tri množice rotacijskih osi. Najprej so tu 3 med seboj pravokotne osi 4-kratne simetrije. Vsaka takšna os gre skozi nasprotni oglišči. Sledijo 4 osi 3-kratne simetrije. Le-te gredo skozi središča nasprotnih mejnih ploskev. Na koncu imamo še 6 osi dvakratne simetrije, ki gredo skozi središča nasprotnih robov. Za polieder s takšnim sistemom osi pravimo, da ima *oktaedrsko* simetrijo (ali simetrijo osmerca), oznaka O.

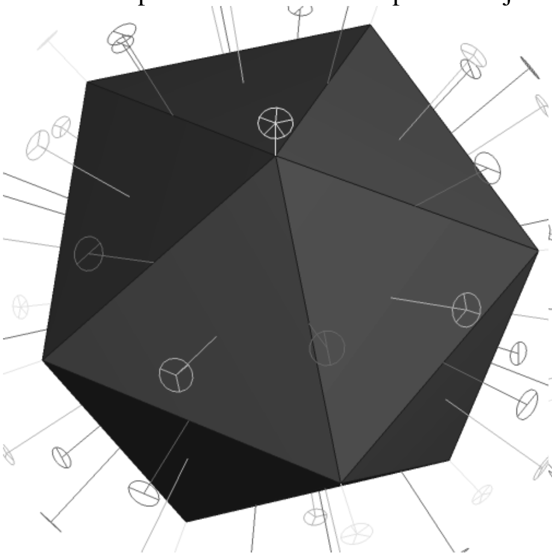
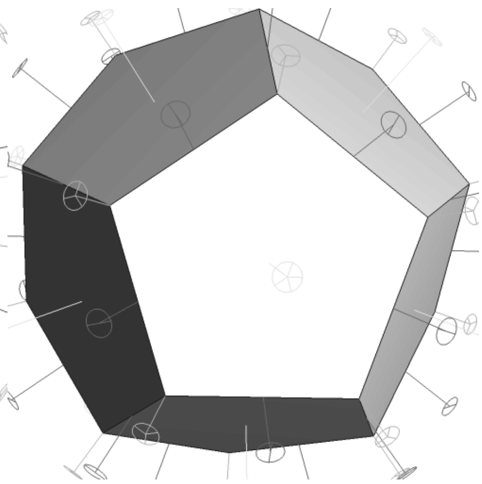




Opiši rotacijske osi kocke.

Simetrija dvajseterca (I, ikozaedrska simetrija)

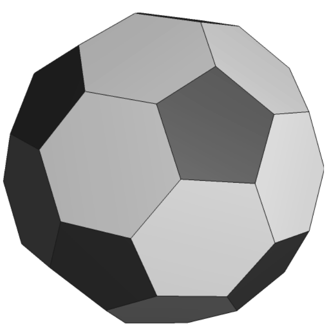
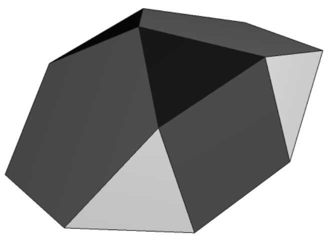
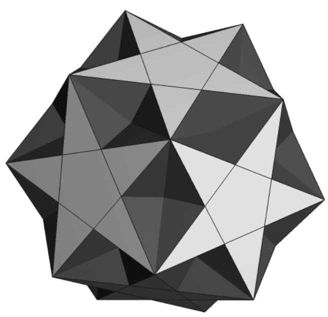
Pravilni dvajseterec ima osi 2-kratne, 3-kratne in 5-kratne rotacijske simetrije. Petkratna os poteka skozi nasprotni oglišči. Skupaj je 6 takih osi. Trikratne osi potekajo skozi središča nasprotnih mejnih ploskev. Teh osi je 10. Petnajst osi 2-kratne rotacije poteka skozi središča nasprotnih robov. Temu tipu simetrije se reče *ikozaedrska* simetrija.

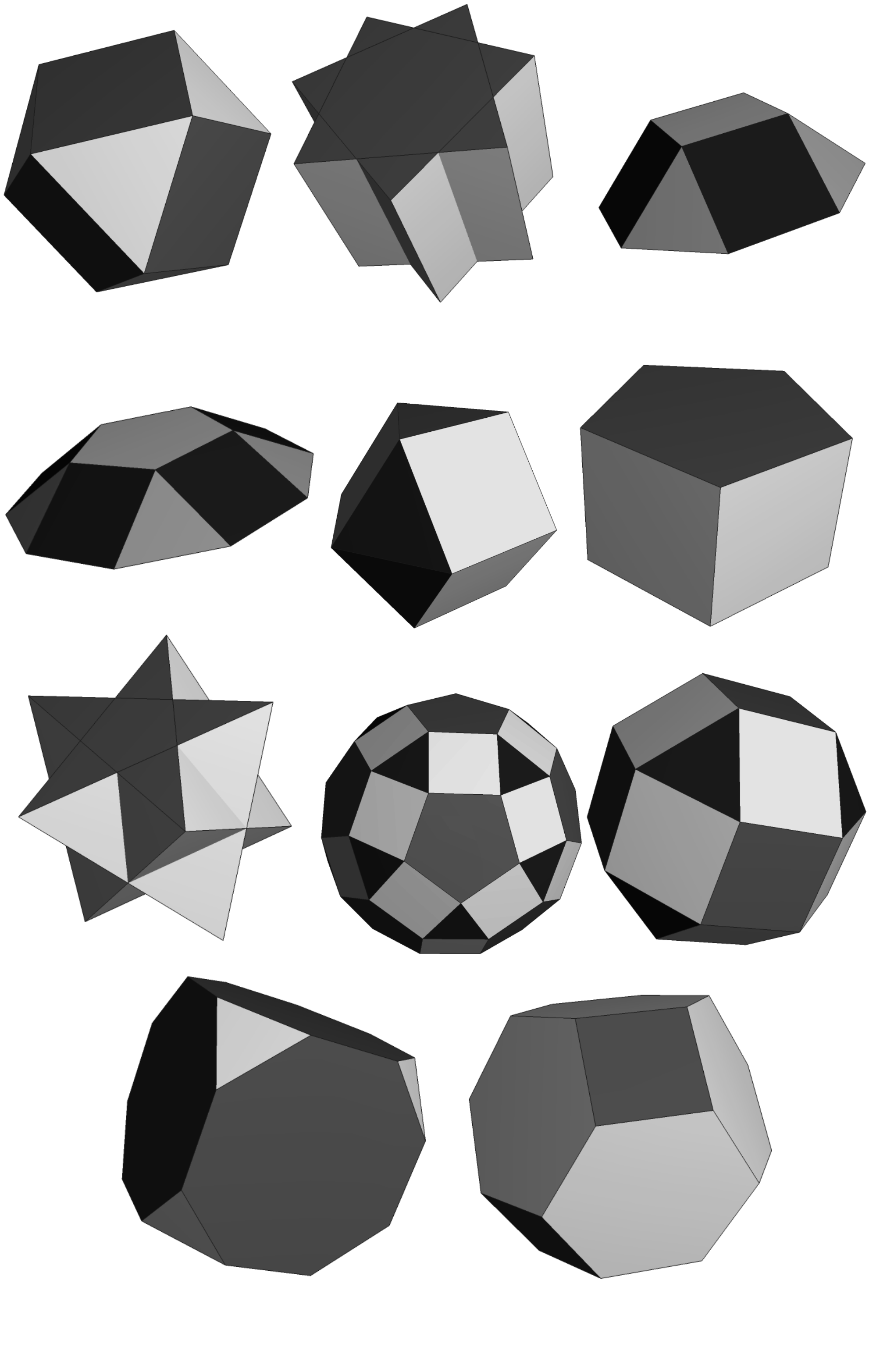



Opiši osi rotacije dvanajsterca.

Naloge

Določi tipe rotacijske simetrije za spodnja telesa.



Lukasiewiczeva modalna trovrednostna logika

Zamisel, da je morda poleg 0 in 1 več resničnostnih vrednosti, se je porodila l. 1918 poljskemu logiku Janu Lukasiewiczu na osnovi branja Aristotelove razprave o statusu stavkov, ki govorijo o prihodnosti. Trdil je, da je nesmiselno govoriti, da je stavek (na primer, »Jutri bo pomorska bitka.«), ki se nanaša na prihodnost, resničen (1) ali neresničen (0).

Za takšne stavke je vpeljal vmesno vrednost ½ (neke vrste verjetnega). Tako imata lahko »p« in »ni p« to srednjo vrednost. Vendar ima ta logika neko slabost: stavek »p ali ne p« ima v našem primeru vrednost ½.
Resničnostne tabele za izjavne povezave so strnjene v preglednici.

p	q	p & q	p v q	p -> q	p <-> q
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1

Naslednja tabela pa se nanaša na negacijo in *modalna* operatorja »nujno je« in »možno je«.

p	¬p	□p	◇p
1	0	1	1
0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1

Ugotovi resničnostno vrednost danih stavkov, podanih v dveh svetovih.

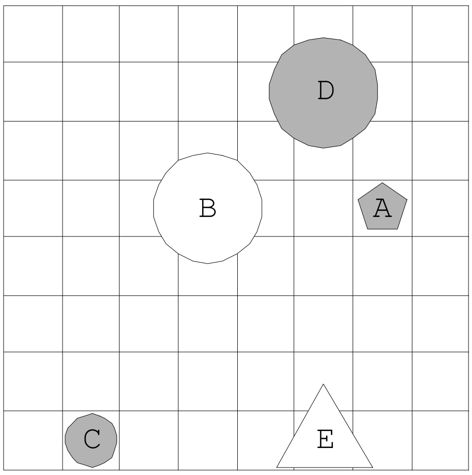
Krog pomeni, da oblika še ni določena, ampak bo enkrat v prihodnosti.

1. Možno je: lik D je kvadrat.
2. Možno je: lik C je petkotnik.
3. Možno je: lik E je kvadrat.
4. Nujno je: lik C je petkotnik.
5. Nujno je: lik C je trikotnik.
6. Nujno je: lik D je petkotnik.

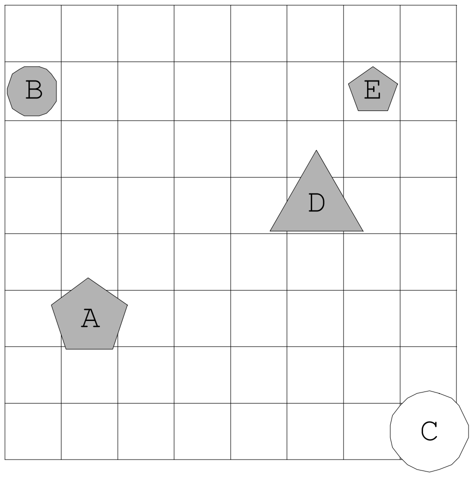
7. Ni možno, da: lik E je petkotnik.
8. Ni možno, da: lik A je petkotnik.
9. Ni možno, da: lik A je kvadrat.
10. Ni nujno, da: lik D je kvadrat.
11. Ni nujno, da: lik C je trikotnik.
12. Ni nujno, da: lik D je petkotnik.
13. Možno je: lik E ni kvadrat, če in samo če je lik A kvadrat.
14. Možno je: lik C ni kvadrat in lik C ni trikotnik.
15. Nujno je: če je lik B kvadrat, potem je lik E kvadrat.
16. Nujno je: lik B je petkotnik in lik E je trikotnik.
17. Ni nujno, da: lik D ni kvadrat, če in samo če je lik E kvadrat.
18. Ni nujno, da: če lik B ni trikotnik, potem lik A ni kvadrat.
19. Ni možno, da: lik D ni petkotnik ali je lik B kvadrat.
20. Ni možno, da: če lik D ni trikotnik, potem je lik E kvadrat.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2																				

1. situacija



2. situacija



Ugotovimo, da je v prvem svetu možno, da je D kvadrat, v drugem pa to ni možno. Za lik C je v obeh svetovih možno, da je petkotnik. Lik E ne more biti kvadrat, saj je trikotnik (oz. petkotnik). Seveda pa ni nujno, da je D kvadrat.

Rešitev naloge

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1

Sudoku

Reši naloge:

1.

			2	3				9
7		6			9		4	8
	3		4	6		1		
		2		7		5	8	
1		7	6			4	9	
3	6				4	2		
5	7	1	8		3			
						7		1
	9						3	2

2.

		7					6	9
			1				7	3
	6		3			1		
	2	1	4			6	5	
7	3		6			4	9	
		6	5	9				
6	7			1		9	3	
		3		2		7	4	
5		4			6		2	1

3.

			2			5		9
		8		5	9		4	6
	5					1	2	
5	3		6		2	8	9	
	6		3			2	7	5
					4			3
6	4							
	7	3	8	2	5			
1	8			4	6	7	3	

4.

		6	1		8			9
	3	7	2		9	5		
8	5				6	1	4	2
2			5		3	6		
			4		7		8	
	9	8				4		
		1		3	5			6
5	7		8		1			4
				2			1	

5.

7	1		2				5	
2				5			6	7
					7		2	
		1			3	5		
	4					2	7	
			5		2			4
				1				
6		4	7				3	1

6.

1			3					
7						2		
			2	6				7
		2	4			6		
	3	4			1			
5							1	3
				2				
2	7	3		1				
4					6			1

Rešitve

1.

4	1	5	2	3	8	6	7	9
7	2	6	1	5	9	3	4	8
8	3	9	4	6	7	1	2	5
9	4	2	3	7	1	5	8	6
1	5	7	6	8	2	4	9	3
3	6	8	5	9	4	2	1	7
5	7	1	8	2	3	9	6	4
2	8	3	9	4	6	7	5	1
6	9	4	7	1	5	8	3	2

2.

3	1	7	2	4	8	5	6	9
4	5	8	1	6	9	2	7	3
2	6	9	3	5	7	1	8	4
9	2	1	4	7	3	6	5	8
7	3	5	6	8	1	4	9	2
8	4	6	5	9	2	3	1	7
6	7	2	8	1	4	9	3	5
1	8	3	9	2	5	7	4	6
5	9	4	7	3	6	8	2	1

3.

4	1	6	2	3	7	5	8	9
7	2	8	1	5	9	3	4	6
3	5	9	4	6	8	1	2	7
5	3	1	6	7	2	8	9	4
8	6	4	3	9	1	2	7	5
2	9	7	5	8	4	6	1	3
6	4	2	7	1	3	9	5	8
9	7	3	8	2	5	4	6	1
1	8	5	9	4	6	7	3	2

4.

4	2	6	1	5	8	3	7	9
1	3	7	2	4	9	5	6	8
8	5	9	3	7	6	1	4	2
2	1	4	5	8	3	6	9	7
3	6	5	4	9	7	2	8	1
7	9	8	6	1	2	4	5	3
9	4	1	7	3	5	8	2	6
5	7	2	8	6	1	9	3	4
6	8	3	9	2	4	7	1	5

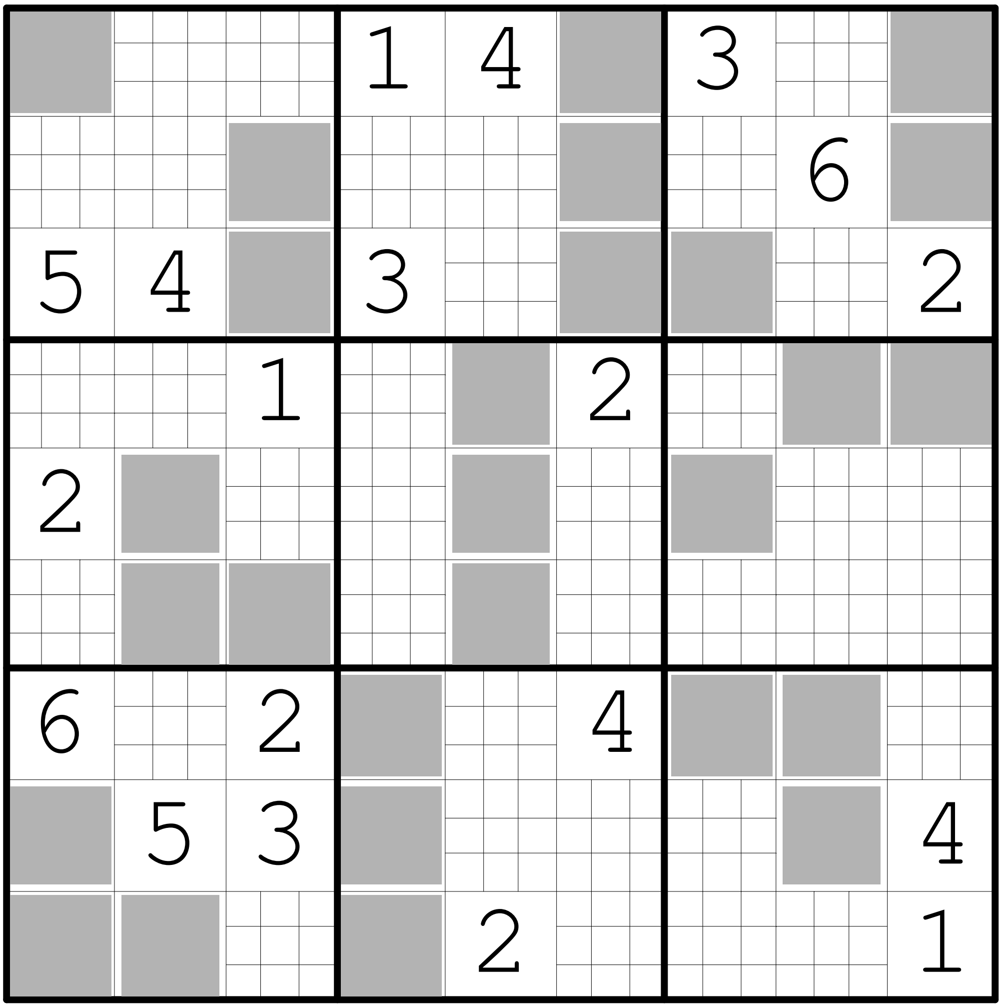
5.

7	1	6	2	4		3	5	
2	3		1	5		4	6	7
4	5		3	6	7	1	2	
	2	1	4	7	3	5		6
	4	5	6		1	2	7	3
3	6	7	5		2		1	4
1	7	2		3	4	6		5
5		3		1	6	7	4	2
6		4	7	2	5		3	1

6.

1	2	6	3	4	7	5		
7	4		1	5		2	3	6
3	5		2	6		1	4	7
	1	2	4	7	3	6		5
6	3	4	5		1		7	2
5		7	6		2	4	1	3
	6	1	7	2	4	3	5	
2	7	3		1	5		6	4
4		5		3	6	7	2	1

Nagradna logična naloga



Rešite sudoku in ga do 5. maja 2006 pošljite na naslov *Logika in razvedrilna matematika, Svetčeva pot 11, 1241 Kamnik*. Med pravilnimi rešitvami bomo izžrebali tri dobitnike nagrad!