Zbirka rešenih izpitnih nalog iz numeričnih metod

Borut Jurčič - Zlobec

Andrej Perne

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko
Ljubljana, 2016

Kazalo

Predgovor

Zbirka rešenih izpitnih nalog iz numeričnih metod je nastala kot učno gradivo za pripravo na izpit iz predmeta Numerične metode na Fakulteti za elektrotehniko. V prvi vrsti je tako namenjena študentom te fakultete. Marsikaj zanimivega pa lahko najdejo v njej tudi študentje drugih, predvsem tehniških fakultet, saj pokriva večino standardnih poglavij iz numeričnih metod, ki se predavajo na fakultetah, kjer to ni glavni predmet. Podlaga za zbirko so naloge, ki so se pojavljale na izpitih med leti 2000 in 2015.

Snov iz nalog obsega poglavja, ki se predavajo pri predmetu Numerične metode, in sicer reševanje nelinearnih enačb (bisekcija, tangentna in sekantna metoda, Newtonova metoda za sisteme), sisteme linearnih enačb (direktne in iterativne metode), aproksimacijo (metoda najmanjših kvadratov), interpolacijo, numerično odvajanje in integriranje (Newton-Cotesova in Gaussova kvadraturna pravila), reševanje navadnih diferencialnih enačb (Eulerjeve metode) ter robnih problemov v eni in dveh dimenzijah (metoda končnih razlik).

Pri vsakem poglavju je nekaj nalog rešenih z vsemi postopki, nekatere pa so dane bralcu v razmislek in reševanje. Vse naloge pa spremljajo rezultati in večinoma primerjave s točnimi vrednostmi. Pri nekaterih nalogah rezultate ilustriramo tudi s slikami. Ni namen te zbirke, da bi preko nje spoznavali numerična programska orodja, kot sta `Matlab`® in `Octave`, pač pa, da naloge rešujemo klasično, na papir. Upava, da bo pričujoča zbirka marsikomu v pomoč pri pripravi na izpit, pa tudi v veselje pri spoznavanju novih orodij, ki so uporabna na marsikaterem strokovnem področju.

Avtorja se zahvaljujeva recenzentoma prof. dr. Tomažu Slivniku in prof. dr. Emilu Žagarju za strokovni pregled ter konstruktivne in umestne pripombe. Tudi z njuno pomočjo je zbirka dobila dokončno obliko in vsebino.

1 Iterativno reševanje nelinearnih enačb

Rešujemo nelinearne enačbe oblike $f(x) = 0$.

Bisekcija

Vrednosti v krajiščih začetnega intervala $[x_0, x_1]$, torej $f(x_0)$ in $f(x_1)$, morata biti različnega predznaka. V vsaki iteraciji izračunamo nov približek po formuli

$$x_{n+1} = x_{n-1} + \frac{x_n - x_{n-1}}{2},$$

ki je ekvivalentna formuli $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}+x_n}{2}$, vendar stabilnejša. Če je $f(x_{n-1})\, f(x_{n+1}) < 0$, izberemo za nov interval $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, sicer pa $[x_{n+1}, x_n]$.

Sekantna metoda

Začnemo s primerno izbranima začetnima približkoma x_0 in x_1. V vsaki iteraciji izračunamo nov približek po formuli

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\, \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Metoda regula falsi

Za začetni interval $[x_0, x_1]$ mora veljati $f(x_0)\, f(x_1) < 0$. V vsaki iteraciji izračunamo nov približek po formuli

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\, \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Če velja $f(x_{n-1})\, f(x_{n+1}) < 0$, izberemo za nov interval $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, sicer pa $[x_{n+1}, x_n]$.

Newtonova (tangentna) metoda

Začnemo s primerno izbranim začetnim približkom x_0. V vsaki iteraciji izračunamo nov približek po formuli

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Naloge

1. Z Newtonovo iteracijo določite vrednost $\sqrt[3]{2}$ na tri decimalna mesta natančno.

   Rešitev: Rešujemo lahko enačbo $x^3 - 2 = 0$ z uporabo Newtonove metode. Za začetni približek vzamemo $x_0 = 1$. Z iteracijo

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \frac{2(x_n^3 + 1)}{3x_n^2}$$

   dobimo zaporedje približkov

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
1.000	1.333	1.264	1.260	1.260

   .

   Po treh korakih metode je $x_3 = 1.260$.

2. Zapišite iteracijsko shemo sekantne metode za reševanje nelinearne enačbe $f(x)=0$, kjer je

$$f(x) = x + \tfrac{(x^3+3)}{2}.$$

Napravite tri korake metode, če za začetna približka izberete $x_0 = -3$ in $x_1 = -2$.

Rešitev: Pri sekantni metodi uporabimo iteracijo

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

in z uporabo izbranih začetnih približkov dobimo zaporedje približkov

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-3.000	-2.000	-1.571	-1.225	-1.062	-1.008	-1.000

.

Po treh korakih metode je $x_4 = -1.062$, točna rešitev za primerjavo je $x_\infty = -1$.

3. Zapišite iteracijsko shemo metode regula falsi za reševanje nelinearne enačbe $f(x)=0$, kjer je

$$f(x) = x^3 + \sin x - 1.$$

Napravite tri korake metode, če za začetna približka izberete $x_0 = \frac{1}{2}$ in $x_1 = \frac{3}{2}$.

Rešitev: Pri metodi regula falsi uporabimo iteracijo

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

kjer na vsakem koraku izberemo tisti podinterval, kjer je v krajiščih funkcija različno predznačena (enako kot pri metodi bisekcije). Z uporabo izbranih začetnih približkov dobimo zaporedje približkov

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0.500000	1.500000	0.604981	0.657405	0.682804	0.694905

.

Po treh korakih metode je $x_4 = 0.682804$, točna rešitev za primerjavo je $x_\infty = 0.705694$.

4. Na intervalu $[0,2]$ ležita dva korena enačbe

$$x\,e^{-x^2} - \tfrac{1}{5} = 0.$$

Poiščite večjega od njiju in ga določite na 4 decimalna mesta natančno.

Rezultati: Iskana korena sta $x_{\max} = 1.3932$, $x_{\min} = 0.2089$.

5. Pokažite, da leži na intervalu $I = [1,2]$ vsaj en koren enačbe

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0.$$

Poiščite ga z metodo bisekcije tako, da bo napaka manjša od 10^{-3}. Koliko korakov bisekcije je potrebnih?

Rezultati: Ker je odvod $f'(x) = 3x^2 - 1$ na intervalu $[1,2]$ pozitiven, je funkcija f na tem intervalu strogo naraščajoča, kar pomeni, da ima na tem intervalu največ en koren. Ker je funkcija f v krajiščih intervala različno predznačena, ima na tem intervalu natanko en koren, in sicer $\hat{x} = 1.324$. Za izračun le-tega na željeno natančnost je potrebnih 11 korakov bisekcije.

6. Z Newtonovo metodo določite $\sqrt{3}$ in $\sqrt{15}$ na pet decimalnih mest natančno.

Rezultati: Iščemo korena funkcij $x^2 - 3 = 0$ in $x^2 - 15 = 0$ ter dobimo $\sqrt{3} \approx 1.73205$ in $\sqrt{15} \approx 3.87298$.

7. Z metodo bisekcije določite vrednost $\sqrt[3]{25}$. Napaka naj bo manjša od 10^{-4}.

   Rezultat: Iščemo koren funkcije $x^3 - 25 = 0$ in dobimo $\sqrt[3]{25} \approx 2.9240$.

8. Pokažite, da leži na intervalu $I = [0, 2]$ vsaj en koren enačbe

$$f(x) = x^2 e^{-x} - \tfrac{1}{3} = 0.$$

   Poiščite ga z metodo bisekcije in z Newtonovo metodo tako, da bo napaka manjša od 10^{-3}. Koliko korakov iteracije je potrebnih? Pri Newtonovi metodi vzemite za začetni približek $x_0 = 0$.

   Rezultati: Funkcija f je na intervalu I strogo naraščajoča in v krajiščih intervala različno predznačena, zato ima na tem intervalu natanko en koren, in sicer $x = 0.910$. Za izračun le-tega na željeno natančnost je potrebnih 9 korakov metode bisekcije in samo 2 koraka Newtonove metode.

9. Z Newtonovo metodo poiščite pozitivno rešitev enačbe

$$x^2 - 10 \cos x = 0.$$

   Rezultat: Pozitivna rešitev je $x = 1.37936$.

10. Z Newtonovo metodo določite en kompleksni koren enačbe

$$z^2 + 1 = 0.$$

   Za začetni približek vzemite $z_0 = 1 + i$ in izračunajte z_3.

   Rezultat: Iskani kompleksni koren je $z_3 = 0.00171569 + 0.997304i$.

11. Z Newtonovo metodo rešite enačbo

$$x^3 + \tfrac{23}{4} x + 3 = 0.$$

   Ali iteracija konvergira ne glede na to kako izberemo začetni približek?

   Rezultat: Rešitev enačbe je $x = -0.5$. Iteracija ne konvergira za vsak začetni približek.

12. Zapišite tri korake sekantne metode za enačbo

$$x + \frac{x^3 + 3}{2} = 0,$$

   kjer za začetna približka vzamete $x_0 = 1$ in $x_1 = 3$.

   Rezultati: Prvi trije koraki so $x_2 = 0.6$, $x_3 = 0.26444$ in $x_4 = -1.10595$.

13. S sekantno metodo poiščite rešitev enačbe

$$x^3 + \tfrac{1}{2} = \cos x,$$

   če za začetna približka vzamete $x_0 = 0$ in $x_1 = 1$. Napravite 7 korakov sekantne metode.

   Rezultati: Prvih sedem korakov je $x_2 = 0.342537$, $x_3 = 0.536536$, $x_4 = 0.738769$, $x_5 = 0.648924$, $x_6 = 0.660178$, $x_7 = 0.661315$ in $x_8 = 0.661298$.

14. S pomočjo Newtonove metode poiščite rešitev nelinearne enačbe

$$2e^x - e^{2x} = 0$$

   na 6 decimalnih mest natančno.

   Rezultat: Rešitev enačbe je $x = 0.693147$.

1.1 Navadna iteracija, metoda negibne točke

Rešitvam enačbe $x = f(x)$ pravimo negibne točke. Tiste, v katerih je absolutna vrednost odvoda pod ena, torej $|f'(x)| < 1$, imenujemo *privlačne*, tiste, v katerih je absolutna vrednost odvoda nad ena, torej $|f'(x)| > 1$, pa *odbojne* negibne točke. Privlačne negibne točke lahko poiščemo z navadno iteracijo

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

kjer je x_0 primerno izbran začetni približek.

Naloge

1. Z Newtonovo iteracijo poiščite rešitev enačbe $x = f(x)$, kjer je

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}(x^3 + 3).$$

Izberite začetni približek $x_0 = 1$. Ali lahko dobimo rešitev enačbe tudi z navadno iteracijo $x_{n+1} = f(x_n)$ s primerno izbranim začetnim približkom?

Rešitev: Newtonova iteracija za enačbo $f(x) - x = 0$ je

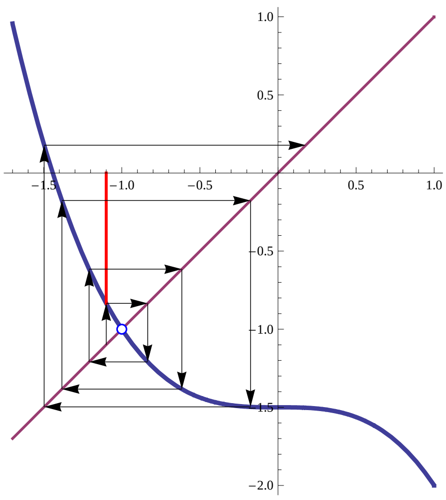
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - x_n}{f'(x_n) - 1} = x_n - \frac{-\frac{1}{2}x_n^3 - x_n - \frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}x_n^2 - 1} = \frac{-x_n^3 + \frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}x_n^2 - 1}.$$

Z začetnim približkom $x_0 = 1$ dobimo zaporedje približkov

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.000	−0.200	−1.423	−1.085	−1.004	−1.000

.

Rešitev enačbe je torej $x = -1$. Absolutna vrednost odvoda $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2$ v točki $x = -1$ je $|f'(-1)| = \frac{3}{2} > 1$. To pomeni, da je negibna točka odbojna (glejte sliko) in navadna iteracija ne konvergira.



2. Na intervalu $[0, 1]$ ima enačba $f(x) = x$, kjer je

$$f(x) = 3\sqrt{x}e^{-x} - \tfrac{1}{3},$$

dve rešitvi. Katero od teh dveh rešitev je mogoče poiskati z navadno iteracijo

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_{n+1} = 3\sqrt{x_n}e^{-x_n} - \tfrac{1}{3}$$

s primerno izbranim začetnim približkom x_0?

Rešitev: Najprej z Newtonovo iteracijo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - x_n}{f'(x_n) - 1}$$

poiščemo rešitvi enačbe $f(x) = x$. Izberemo en začetni približek $x_0 = 0.02$ ter drugi začetni približek $x_0 = 1.00$ in dobimo zaporedje približkov

x_0	x_1	x_2	x_3
0.02	0.0130373	0.013748	0.0137594
1.00	0.851983	0.84922	0.849218

.

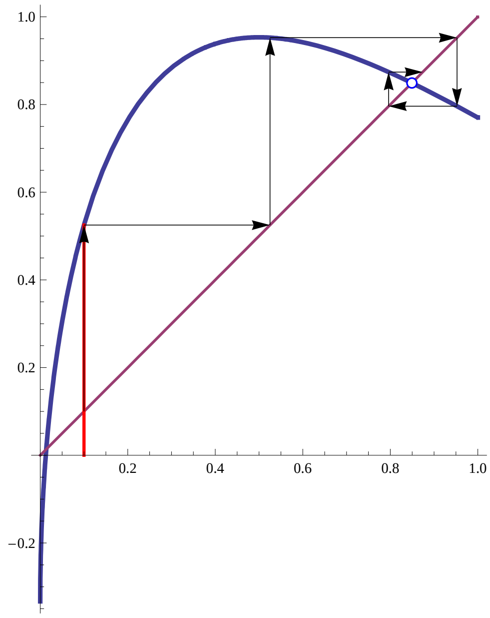
Absolutna vrednost odvoda $f'(x) = \frac{3e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}$ v izračunanih točkah je

$$|f'(0.0137594)| = 12.2658 > 1$$

za prvo negibno točko ter

$$|f'(0.849218)| = 0.486293 < 1$$

za drugo negibno točko. To pomeni, da je prva točka odbojna, druga pa privlačna (glejte sliko), torej lahko z navadno iteracijo poiščemo le drugo negibno točko.



3. Enačbo $x = b\,x(1-x)$ rešujemo za različne vrednosti parametra b. V kakšnih mejah se mora gibati parameter b, da iteracija

$$x_{n+1} = b\,x_n(1 - x_n),$$

s primerno izbiro začetnega približka, konvergira k pozitivni rešitvi enačbe?

Rešitev: Enačba ima dve rešitvi, $x = 0$ in $x = \frac{b-1}{b}$. Da bo ta rešitev pozitivna, mora biti $b > 1$. Z gornjo iteracijo lahko poiščemo samo privlačne negibne točke, torej take, kjer je odvod desne strani enačbe $f(x) = b\,x(1-x)$ po absolutni vrednosti manj kot ena. Ker je

$$f'(x) = b\,(1 - 2x),$$

dobimo

$$\left|f'\left(\frac{b-1}{b}\right)\right| = |2 - b| < 1,$$

ki ima rešitev za $b \in (1, 3)$.

4. Pokažite, da leži na intervalu $I = [0.1, 1]$ natanko en koren enačbe

$$x + \log x = 0,$$

ter ga nato poiščite z Newtonovo metodo. Funkcije

$$f(x) = -\log x, \quad g(x) = e^{-x}, \quad h(x) = \frac{x + e^{-x}}{2}$$

imajo natanko eno negibno točko na danem intervalu I, ki se ujema s korenom zgornje enačbe. V katerih primerih je ta točka privlačna in v katerih odbojna? Z drugimi besedami, v katerih primerih lahko poiščemo začetni približek, različen od negibne točke, tako, da iteracija konvergira, in kdaj to ni mogoče?

Rešitev: Z uporabo Newtonove iteracije

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + \log x_n}{1 + \frac{1}{x_n}}$$

dobimo koren enačbe $\hat{x} = 0.567143$. Funkcija $F(x) = x + \log x$ je strogo naraščajoča in ima za zalogo vrednosti vsa realna števila, zato ima enačba $F(x) = 0$ en sam koren. Ker je $F(0.1) = -2.20259$ in $F(1) = 1$, le-ta leži na intervalu $I = [0.1, 1]$. Preverimo absolutne vrednosti odvodov danih funkcij v tem korenu

$$f'(x) = -\frac{1}{x}, \quad g'(x) = -e^{-x}, \quad h'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{2}.$$

Dobimo

$$|f'(\hat{x})| = 1.76322 > 1, \quad |g'(\hat{x})| = 0.567143 < 1, \quad |h'(\hat{x})| = 0.216428 < 1.$$

Ker je odvod prve funkcije po absolutni vrednosti večji od 1, je prva točka odbojna in iteracija $x_{n+1} = -\log x_n$ ne konvergira. Odvoda druge in tretje funkcije po absolutni vrednosti sta manjša od 1, zato sta ti dve točki privlačni in iteraciji $x_{n+1} = e^{-x_n}$ ter $x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}$ konvergirata.

5. Na intervalu $[0, 2]$ ima enačba $f(x) = 0$, kjer je

$$f(x) = \sqrt{x}e^{-x} - \tfrac{1}{4},$$

dve rešitvi. Katero od teh dveh rešitev je mogoče poiskati z navadno iteracijo

$$x_{n+1} = f(x_n) + x_n, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n}e^{-x_n} - \tfrac{1}{4} + x_n$$

s primerno izbranim začetnim približkom x_0?

Rezultati: Ugotovimo, da je $x_1 = 0.07221$ odbojna točka, $x_2 = 1.63084$ privlačna točka.

6. Pokažite, da ima enačba

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0,$$

en koren na intervalu $[1, 2]$. Uporabite Newtonovo metodo. Katera od iteracijskih oblik

a) $x = g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$,
b) $x = h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$,
c) $x = k(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$,

je najugodnejša za metodo navadne iteracije?

Rezultati: Ker je odvod $f'(x) = 3x^2 + 8x$ na intervalu $[1, 2]$ pozitiven, je funkcija f na tem intervalu strogo naraščajoča, kar pomeni, da ima na tem intervalu največ en koren. Ker je funkcija f v krajiščih intervala različno predznačena, ima na tem intervalu natanko en koren, in sicer $\hat{x} = 1.36523$. Iteracija a) divergira, iteraciji b) in c) pa konvergirata, vendar zadnja hitreje.

7. Določite interval začetnih približkov, za katerega konvergira iteracija

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{e^{x_n}}{3}},$$

in določite negibno točko na dve decimalni mesti natančno.

Rezultati: Iskani interval je $I = (-\infty, \log 12)$, negibna točka pa $\hat{x} = 0.91$.

8. Na intervalu $[0, 1]$ leži natanko ena negibna točka funkcije

$$f(x) = x^2 e^{-x} + \tfrac{1}{2}.$$

Poiščite jo z Newtonovo iteracijo na 4 decimalna mesta natančno. Ali je negibna točka privlačna ali odbojna?

Rezultati: Negibna točka $\hat{x} = 0.7778$ je privlačna.

9. Pokažite, da navadna iteracija $x_{n+1} = f(x_n)$, kjer je

$$f(x) = \tfrac{1}{3}(x^2 - 3),$$

konvergira k rešitvi, ki leži na intervalu $[-1, 1]$, za vsak začetni približek $x_0 \in [-1, 1]$.

Rezultat: Negibna točka $\hat{x} = -0.302776$ je privlačna za vsak začetni približek iz danega intervala.

10. Poiščite negibni točki funkcije

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}$$

ter določite njun tip.

Rezultati: Negibna točka $x_1 = -0.29603$ je odbojna, negibna točka $x_2 = 1.22032$ pa privlačna.

11. Enačba

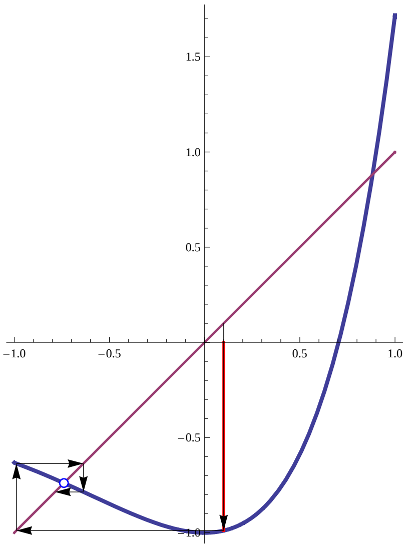
   a) $x = f(x)$, kjer je $f(x) = x^2 e^x - 1$,
   b) $x = f(x)$, kjer je $f(x) = -x^2 e^{-x} + 2$,

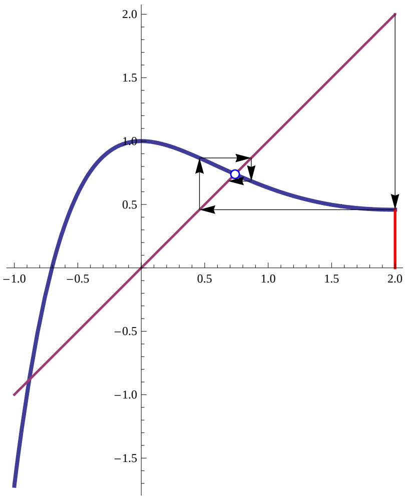
ima dve rešitvi. S pomočjo Newtonove metode ju določite na 6 mest natančno. Ugotovite, katera je privlačna in katera je odbojna točka za navadno iteracijo $x_{n+1} = f(x_n)$.

Rezultati:

a) Točka $x_1 = 0.882534$ je odbojna, točka $x_2 = -0.739123$ pa privlačna (glejte sliko).

b) Točka $x_1 = -1.03746$ je odbojna, točka $x_2 = 1.49825$ pa privlačna (glejte sliko).





1.2 Sistemi nelinearnih enačb

Rešujemo sistem nelinearnih enačbe oblike $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Newtonova metoda za sisteme

Začnemo z začetnim približkom $\mathbf{x}_0$. V vsaki iteraciji izračunamo nov približek po formuli

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - J^{-1}(\mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_n),$$

kjer je J Jacobijeva matrika. Inverza v praksi ne računamo, pač pa rešitev poiščemo preko reševanja sistema linearih enačb.

Naloge

1. Zapišite iteracijsko shemo Newtonove metode za reševanje sistema nelinearnih enačb

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x + y = -\tfrac{1}{2}.$$

Naredite en korak metode, če je začetni približek $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

Rešitev: Iščemo presečišča krožnice in premice, ki se sekata v dveh točkah:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{4},\ y_1 = \frac{-1+\sqrt{7}}{4} \quad \text{in} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}, y_2 = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}.$$

Iteracijska shema se glasi

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - J^{-1}(x_n, y_n) \begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix}.$$

Ker je $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ in $g(x,y) = x + y + \frac{1}{2}$, je Jacobijeva matrika enaka

$$J = \begin{bmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Računamo en korak iteracje za $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - J^{-1}(x_0, y_0) \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Izračun $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$ napravimo tako, da rešimo sistem linearnih enačb

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix},$$

oziroma $z_1 + 3z_2 = \frac{3}{2}$ in $z_1 + z_2 = \frac{5}{2}$, ki ima rešitev $z_1 = 3$ in $z_2 = -\frac{1}{2}$.

Inverza matrike pri numeričnih metodah v praksi običajno nikoli zares ne računamo, saj je izračun časovno potraten in numerično nestabilen. Predvsem to velja za velike matrike. Za matrike reda 2×2 imamo sicer preprosto formulo za izračun inverza, ki pa se je ne da preprosto posplošiti na matrike višjega reda. Tako da v praksi za vse matrike namesto inverza računamo rešitev pripadajočega sistema enačb.

2. Dani sta krožnici
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{in} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$
Z uporabo Newtonove iteracijske sheme za sisteme naredite dva koraka metode z začetnim približkom $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rešitev: Newtonova iteracijska shema za reševanje sistema $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ in $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$ je
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - J^{-1}(x_n, y_n) \begin{bmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{bmatrix}.$$
Ker so parcialni odvodi enaki $f_x = 2x$, $f_y = 2y$, $g_x = 2(x-1)$ in $g_y = 2y$, je Jacobijeva matrika
$$J = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2(x-1) & 2y \end{bmatrix}.$$
Sledi
$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 7/8 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$
Izračun $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ napravimo tako, da rešimo sistem $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, oziroma $2z_1 + 2z_2 = 1$ in $2z_2 = 0$, ki ima rešitev $z_1 = \frac{1}{2}$ in $z_2 = 0$.

Podobno izračunamo $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$ tako, da rešimo sistem $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$, oziroma $z_1 + 2z_2 = \frac{1}{4}$ in $-z_1 + 2z_2 = \frac{1}{4}$, ki ima rešitev $z_1 = 0$ in $z_2 = \frac{1}{8}$.

Za primerjavo, točna rešitev je $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$.

3. Zapišite iteracijsko shemo Newtonove metode za reševanje sistema nelinearnih enačb
$$x^2 + y^3 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$
Naredite en korak metode, če je začetni približek $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rezultat: Jacobijeva matrika je $J = \begin{bmatrix} 2x & 3y^2 \\ 2(x-1) & 2y \end{bmatrix}$, prvi korak pa $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Zapišite iteracijsko shemo Newtonove metode za reševanje sistema nelinearnih enačb
$$x^2 + y^2 = 4, \quad x + y^3 = \tfrac{1}{2}.$$
Naredite dva koraka metode, če je začetni približek $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Rezultat: Jacobijeva matrika je $J = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 3y^2 \end{bmatrix}$, prvi korak $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.70455 \\ -1.06818 \end{bmatrix}$, drugi korak pa $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.69523 \\ -1.06129 \end{bmatrix}$.

2 Sistemi linearnih enačb

2.1 Določeni sistemi

Naloge

1. Izračunajte neskončno in prvo normo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Neskončna norma matrike A je največja vrstična vsota absolutnih vrednosti

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

V našem primeru dobimo $\|A\|_\infty = \max\{4,4,7\} = 7$. Prva norma matrike A je največja stolpična vsota absolutnih vrednosti

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

V našem primeru dobimo $\|A\|_1 = \max\{6,6,3\} = 6$.

2. Izračunajte pogojenostno število matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1+10^{-4} & 2 \end{bmatrix}$$

v prvi in neskončno normi.

Rešitev: Pogojenostno število matrike A je definirano kot $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Izračunajmo najprej inverz matrike A, kjer uporabimo formulo za inverz matrike velikosti 2 krat 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$A^{-1} = 10^3 \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 5+5\cdot 10^{-4} & -5 \end{bmatrix}.$$

Pogojenostni števili v prvi in neskončno normi sta

$$\begin{aligned} \kappa(A)_1 &= \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 4 \cdot 15000.5 = 60002, \\ \kappa(A)_\infty &= \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 3.0001 \cdot 20000 = 60002. \end{aligned}$$

3. Ali je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna?

Rešitev: Matrika je pozitivno definitna, če so vsi glavni minorji matrike pozitivni. Ker je

$$M_1 = 2 > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad \text{in} \quad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

je matrika A pozitivno definitna. Ekvivalenten pogoj za pozitivno definitnost je, da so vse lastne vrednosti matrike A pozitivne. Tudi ta pogoj je izpolnjen, saj so lastne vrednosti enake $\lambda_1 = 0.5858$, $\lambda_2 = 2.0000$ in $\lambda_3 = 3.4142$.

4. Dan je sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Določite LU razcep (brez pivotiranja) matrike A ter z uporabo tega razcepa rešite gornji sistem enačb.

Rešitev: Matriki L in U v LU razcepu matrike A,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{6}{7} & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} \end{bmatrix},$$

dobimo z algoritmom, kjer napravimo redukcijo matrike A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} \end{bmatrix} = U.$$

Elemente v spodnjem trikotniku matrike L dobimo tako, da na vsakem koraku v pripadajočem stolpcu delimo elemente s pripadajočim diagonalnim elementom.

S premo substitucijo najprej rešimo sistem $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, ki ima rešitev $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{7}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$, nato pa z obratno substitucijo še sistem $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, ki ima rešitev $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$.

5. Pokažite, da je matrika koeficientov sistema linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

pozitivno definitna ter rešite sistem z razcepom Choleskega.

Rešitev: Matrika A pozitivno definitna, če so vsi glavni minorji matrike pozitivni. Glavna minorja sta

$$M_1 = 2 > 0 \quad \text{in} \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

ki sta oba pozitivna, torej je dana matrika pozitivno definitna. Razcep Choleskega napravimo tako, da dano matriko razcepimo na produkt $A = L\,L^T$, kjer je L spodnja trikotna matrika

$$\begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & A_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & \mathbf{0} \\ \mathbf{r} & L_* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho & \mathbf{r}^T \\ \mathbf{0} & L_*^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^2 & \rho\mathbf{r}^T \\ \rho\mathbf{r} & \mathbf{r}\mathbf{r}^T + L_*L_*^T \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \alpha = \rho^2 \quad &\Rightarrow \quad \rho = \sqrt{\alpha}, \\ \mathbf{a}^T = \rho\mathbf{r}^T \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{r}^T = \mathbf{a}^T/\rho, \\ A_* = L_*L_*^T + \mathbf{r}\mathbf{r}^T \quad &\Rightarrow \quad L_*L_*^T = A_* - \mathbf{r}\mathbf{r}^T. \end{aligned}$$

V našem primeru dobimo

$$\begin{aligned} \alpha = 2 \quad &\Rightarrow \quad \rho = \sqrt{2}, \\ \mathbf{a}^T = 1 \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{r}^T = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ A_* = 3 \quad &\Rightarrow \quad L_*L_*^T = 3 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}, \quad L_* = \sqrt{\tfrac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Faktor Choleskega je torej

$$L=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}}\end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo tako, da ga razbijemo na dva trikotna sistema

$$L\,L^T\mathbf{x}=\mathbf{b},\quad L^T\mathbf{x}=\mathbf{y},\quad L\,\mathbf{y}=\mathbf{b},$$

ki ju rešimo z direktnim (premim) oziroma obratnim vstavljanjem. Z rešitvijo trikotnih sistemov

$$\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}}\end{bmatrix}\mathbf{y}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}}\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{y},$$

dobimo rešitev

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}0\\ \sqrt{\frac{2}{5}}\end{bmatrix}\quad\text{in}\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\\ \frac{2}{5}\end{bmatrix}.$$

6. Prepričajte se, da je matrika

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

pozitivno definitna in napravite razcep Choleskega.

Rešitev: Dana matrika je pozitivno definitna, saj so glavni minorji enaki $M_1=4>0$ in $M_2=\det A=3>0$. Matriko razcepimo na $A=L\,L^T$, kjer je L spodnja trikotna matrika

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ \beta & \gamma\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta\\ \alpha\beta & \beta^2+\gamma^2\end{bmatrix}.$$

Sledi $\alpha=2$, $\beta=\frac{1}{2}$ in $\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Faktor Choleskega je tedaj

$$L=\begin{bmatrix}2 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}.$$

7. Določite razcep Choleskega za matriko

$$A=\begin{bmatrix}25 & 15 & -5\\ 15 & 18 & 0\\ -5 & 0 & 11\end{bmatrix}.$$

Rešitev: Matriko L v razcepu Choleskega matrike $A=L\,L^T$:

$$L=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix},$$

dobimo z algoritmom, kjer napravimo redukcijo matrike A

$$A=\begin{bmatrix}25 & 15 & -5\\ 15 & 18 & 0\\ -5 & 0 & 11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 3 & 9 & 3\\ -1 & 3 & 10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}=L.$$

Pri tem na vsakem koraku diagonalni element korenimo, poddiagonalne elemente delimo z novim diagonalnim elementom ter poračunamo elemente podmatrike enega reda manj desno spodaj:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}18 & 0\\ 0 & 11\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}9 & 3\\ 3 & 10\end{bmatrix},\\ 10-1^2 &= 9.\end{aligned}$$

8. Pokažite, da lahko sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

rešimo s pomočjo Jacobijeve iteracijske metode in zapišite tretjo iteracijo. Za začetni približek vzemite vektor $\mathbf{0}$.

Rešitev: Sistem rešimo z Jacobijevo iteracijo

$$\mathbf{x}_{n+1} = R_J\, \mathbf{x}_n + \mathbf{c}_J,$$

kjer je $R_J = D^{-1}(L + U)$ Jacobijeva iteracijska matrika, $\mathbf{c}_J = D^{-1}b$ pa iteracijski vektor. Pri tem matriko A koeficientov sistema razcepimo na $A = D - L - U$, kjer je D diagonalna matrika, $-L$ spodnji trikotnik, $-U$ pa zgornji trikotnik matrike A. V našem primeru dobimo razcep

$$A = D - (L + U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iteracijska matrika in vektor sta

$$\begin{aligned} R_J &= D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_J &= D^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lastni vrednosti iteracijske matrike R_J dobimo iz enačbe

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2} = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ker sta po absolutni vrednosti manj kot 1, je Jacobijeva iteracija konvergentna. Iz iteracijske sheme

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

dobimo zaporedje približkov

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}.$$

Za primerjavo, točna rešitev je enaka

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9. Pokažite, da lahko sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

rešimo s pomočjo Gauss-Seidlove iteracijske metode in zapišite tretjo iteracijo. Za začetni približek vzemite vektor $\mathbf{0}$.

Rešitev: Sistem rešimo z Gauss-Seidlovo iteracijo

$$\mathbf{x}_{n+1} = R_{GS}\, \mathbf{x}_n + \mathbf{c}_{GS},$$

kjer je $R_{GS} = (D - L)^{-1}U$ Gauss-Seidlova iteracijska matrika, $\mathbf{c}_{GS} = (D - L)^{-1}b$ pa iteracijski vektor. Pri tem matriko A koeficientov sistema razcepimo na $A = D - L - U$, kjer je D diagonalna matrika, $-L$ spodnji trikotnik, $-U$ pa zgornji trikotnik matrike A. V našem primeru dobimo razcep

$$A = (D-L) - U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iteracijska matrika in vektor sta

$$\begin{aligned} R_{GS} &= (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}_{GS} &= (D-L)^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lastni vrednosti iteracijske matrike R_{GS} dobimo iz enačbe

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Ker sta po absolutni vrednosti manj kot 1, je Gauss-Seidlova iteracija konvergentna. Iz iteracijske sheme

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_n + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

dobimo zaporedje približkov

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 7/8 \end{bmatrix}.$$

Za primerjavo, točna rešitev je enaka

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

10. Pokažite, da lahko sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

rešimo s pomočjo Jacobijeve iteracijske metode. Zapišite točno rešitev in tretjo iteracijo. Za začetni približek vzemite vektor $\mathbf{0}$.

Rešitev: Matrika koeficientov sistema je diagonalno dominantna, zato Jacobijeva iteracija konvergira. Zapišimo Jacobijevo iteracijo po komponentah

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(n)} - x_3^{(n)}\right), \\ x_2^{(n+1)} &= \frac{1}{3}\left(1 - x_1^{(n)} - x_3^{(n)}\right), \\ x_3^{(n+1)} &= \frac{1}{2}\left(1 - x_1^{(n)}\right), \end{aligned}$$

in dobimo zaporedje iteracij

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 0.2500 \\ 0.3333 \\ 0.5000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0.0417 \\ 0.0833 \\ 0.3750 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 0.1354 \\ 0.1944 \\ 0.4792 \end{bmatrix}.$$

Za primerjavo, točna rešitev je enaka

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.45 \end{bmatrix}.$$

11. Pokažite, da lahko sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

rešimo s pomočjo Gauss-Seidlove iteracijske metode. Zapišite točno rešitev in tretjo iteracijo. Za začetni približek vzemite vektor $\mathbf{0}$.

Rešitev: Matrika koeficientov sistema je diagonalno dominantna, zato Gauss-Seidlova iteracija konvergira. Zapišimo Gauss-Seidlovo iteracijo po komponentah

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(n)} - x_3^{(n)}\right), \\ x_2^{(n+1)} &= \frac{1}{3}\left(1 - x_1^{(n+1)} - x_3^{(n)}\right), \\ x_3^{(n+1)} &= \frac{1}{2}\left(1 - x_1^{(n+1)}\right), \end{aligned}$$

in dobimo zaporedje iteracij

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 0.2500 \\ 0.2500 \\ 0.3750 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0.0938 \\ 0.1771 \\ 0.4531 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 0.0924 \\ 0.1515 \\ 0.4538 \end{bmatrix}.$$

Za primerjavo, točna rešitev je enaka

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.45 \end{bmatrix}.$$

12. Ali lahko rešimo sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

z Gauss-Seidlovo iteracijo? Izračunajte prve tri korake iteracije. Za začetni približek izberite $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$. Kdaj bi se lahko zgodilo, da nas iteracijska metoda pripelje do rešitve v končno korakih?

Rešitev: Gauss-Seidlova iteracija je konvergentna, ker ima iteracijska matrika

$$R_{GS} = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

samo ničelne lastne vrednosti. Ker je iteracijska matrika R_{GS} zgornja trikotna z diagonalo enako nič, je njena tretja potenca identično enaka nič. Zato se tretja iteracija ujema s točno rešitvijo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_3 = \left[0, \frac{1}{2}, 1\right]^T$.

13. Raziščite konvergenco iteracijske sheme $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{a} + A\,\mathbf{x}_n$, kjer je

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Da bo iteracijska shema konvergirala, morajo biti vse lastne vrednosti matrike A po absolutni vrednosti manjše od 1. Lastne vrednosti matrike A so $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ in $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, torej je pogoj za konvergenco izpolnjen in iteracijska shema konvergira.

Vemo tudi, da je spektralni radij $\rho(A)$, torej največja lastna vrednost po absolutni vrednosti, manjši od katerekoli matrične norme, $\rho(A) < \|A\|$. Zato niti ni potreben izračun lastnih vrednosti, saj lahko preverimo, ali je kakšna matrična norma manjša od 1, kar posledično pomeni, da so tudi vse lastne vrednosti absolutno manjše od 1. Če izberemo neskončno normo matrike, to je največjo vrstična vsota po absolutni vrednosti, dobimo

$$\|A\|_\infty = \tfrac{11}{12} < 1,$$

kar pomeni, da je pogoj za konvergenco izpolnjen in iteracijska shema konvergira.

14. Izračunajte pogojenostno število matrike $A = \begin{bmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{bmatrix}$.

    Rezultat: Pogojenostno število je $\kappa(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = 2.4973 \cdot 10^8$.

15. Določite LU razcep brez pivotiranja za matriko $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ -4 & 7 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & -18 \end{bmatrix}$.

    Rezultati: Faktorja LU razcepa sta $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ in $U = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

16. Ali lahko rešimo sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

    iterativno z Jacobijevo iteracijo? Poiščite rešitev.

    Rezultat: Da, ker je matrika koeficientov šibko diagonalno dominantna. Rešitev je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

17. Določite prve tri zaporedne približke Gauss-Seidlove iteracije za sistem enačb

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ -x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

    Uporabite začetni približek $\mathbf{x}^0 = [1, 1, 1]^T$.

    Rezultati: Prvi: $\mathbf{x}^1 = [5.2500, 3.8125, -5.0469]^T$, drugi: $\mathbf{x}^2 = [3.1406, 3.8828, -5.0293]^T$, tretji približek: $\mathbf{x}^3 = [3.0879, 3.9268, -5.0183]^T$, točna: $\mathbf{x} = [3, 4, -5]^T$.

18. Rešite sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

    z Jacobijevo in Gauss-Seidlovo iteracijsko metodo. Ali zaporedje iteracij po obeh metodah konvergira? Koliko iteracij je potrebnih, da pade neskončna norma razlike med zadnjo iteracijo in pravilno rešitvijo pod 10^{-2}? Za začetni približek vzamite vektor $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$.

    Rezultati: Obe iteraciji konvergirata, saj je matrika koeficientov (strogo) diagonalno dominantna. Točna: $\mathbf{x} = [0.6, 0.6, 0.8]^T$, število iteracij: $N_{\text{Jacobi}} = 7$, $N_{\text{Gauss-Seidel}} = 5$.

19. Pokažite, da lahko sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

rešimo s pomočjo Jacobijeve in Gauss-Seidlove iteracijske metode. Zapišite točno rešitev in tretjo iteracijo. Za začetni približek vzemite vektor $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$.

Rezultati: Obe iteraciji konvergirata, saj je matrika koeficientov (strogo) diagonalno dominantna. Točna: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$, Jacobi: $\mathbf{x}_3^J = \begin{bmatrix} 0.0521 \\ 0.4444 \\ 0.4792 \end{bmatrix}$, Gauss-Seidel: $\mathbf{x}_3^{GS} = \begin{bmatrix} 0.0299 \\ 0.4744 \\ 0.4850 \end{bmatrix}$.

20. Ali lahko rešimo sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

z Jacobijevo in Gauss-Seidlovo iteracijsko metodo? Izračunajte prve tri korake za obe iteraciji ter rezultate primerjajte s točno rešitvijo. Za začetni približek vzemite vektor $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$. Kdaj bi se lahko zgodilo, da bi nas iteracijska metoda pripeljala do rešitve v končno korakih?

Rezultati: Obe iteraciji konvergirata, saj imata obe iteracijski matriki samo ničelne lastne vrednosti. Točna: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$, Jacobi: $\mathbf{x}_3^J = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}$, Gauss-Seidel: $\mathbf{x}_3^{GS} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}$. Do rešitve v končno korakih gotovo pridemo, ko je iteracijska matrika nilpotentna. To pomeni, da je neka potenca iteracijske matrike ničelna matrika.

21. Ali lahko rešimo sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

z Jacobijevo in Gauss-Seidlovo iteracijsko metodo? Izračunajte prvi korak za obe iteraciji ter rezultate primerjajte s točno rešitvijo. Za začetni približek vzemite vektor $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Koliko je prva norma razlike posameznega približka in točne rešitve?

Rezultati: Obe iteraciji konvergirata, saj je matrika koeficientov sistema (strogo) diagonalno dominantna. Točna: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$, Jacobi: $\mathbf{x}_1^J = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$, Gauss-Seidel: $\mathbf{x}_1^{GS} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix}^T$, Prvi normi razlike: $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^J\right\|_1 = \frac{11}{12}$, $\left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^{GS}\right\|_1 = \frac{1}{2}$.

22. Dan je sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ali Jacobijeva iteracija konvergira? Odgovor utemeljite! Naredite dva koraka Jacobijeve iteracije z začetnim približkom $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Rezultati: Jacobijeva iteracija konvergira, saj je matrika A (strogo) diagonalno dominantna. Točna rešitev: $\mathbf{x}_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, prva in druga iteracija: $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{13}{12} & \frac{11}{12} \end{bmatrix}^T$.

23. Dan je sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ali Jacobijeva iteracija konvergira? Odgovor utemeljite! Naredite dva koraka Jacobijeve iteracije z začetnim približkom $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Rezultati: Jacobijeva iteracija konvergira, saj je matrika A (strogo) diagonalno dominantna. Točna rešitev: $\mathbf{x}_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, prva in druga iteracija: $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 2 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{11}{12} & \frac{85}{36} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^T$.

24. Dan je sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ali Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija konvergirata? Odgovor utemeljite! Naredite tri korake Jacobijeve in Gauss-Seidlove iteracije z začetnim približkom $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Rezultati: Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija konvergirata, saj je matrika A (strogo) diagonalno dominantna. Točna rešitev: $\mathbf{x}_\infty = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Prve tri iteracije z Jacobijevo metodo:

$$\mathbf{x}_1^J = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2^J = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5/6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3^J = \begin{bmatrix} 35/18 \\ 5/6 \end{bmatrix},$$

prve tri iteracije z Gauss-Seidlovo metodo:

$$\mathbf{x}_1^{GS} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5/6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2^{GS} = \begin{bmatrix} 35/18 \\ 35/36 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3^{GS} = \begin{bmatrix} 2 \\ 215/216 \end{bmatrix}.$$

25. Dan je sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ali Gauss-Seidlova iteracija konvergira? Odgovor utemeljite! Naredite tri korake Gauss-Seidlove iteracije z začetnim približkom $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Rezultati: Ker sta lastni vrednosti iteracijske matrike $\lambda_1 = \frac{4}{5}$ in $\lambda_2 = 0$ po absolutni vrednosti manjši kot 1, Gauss-Seidlova iteracija konvergira. Tretji korak: $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 61/5 \\ 244/25 \end{bmatrix}$, točna rešitev: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \end{bmatrix}$.

26. Določite katerega od linearnih sistemov enačb $A_i\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $i = 1, 2$, kjer je

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

lahko rešite s pomočjo Jacobijeve iteracije. Vzemite začetni približek $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$ in zapišite tretjo iteracijo $\mathbf{x}_3$.

Rezultati: Prva Jacobijeva iteracijska matrika ima obe lastni vrednosti enaki 0, druga pa ima lastni vrednosti enaki $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, torej lahko z Jacobijevo iteracijo rešimo le prvi sistem. Dobimo $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 = [-1, 2]^T$, ki pa je že točna rešitev.

27. Določite katerega od linearnih sistemov enačb $A_i\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $i = 1, 2$, kjer je

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

lahko rešite s pomočjo Gauss-Seidlove iteracije. Vzemite začetni približek $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$ in zapišite tretjo iteracijo $\mathbf{x}_3$.

Rezultati: Prvi sistem ni rešljiv, pri drugem pa ima Gauss-Seidlova iteracijska matrika lastni vrednosti enaki 0 in $\frac{3}{4}$. Dobimo $\mathbf{x}_1 = [1, 2]^T$, $\mathbf{x}_2 = \left[\frac{3}{4}, 2\right]^T$ in $\mathbf{x}_3 = \left[\frac{9}{16}, 2\right]^T$. Točna rešitev je $\mathbf{x} = [0, 2]^T$.

2.2 Nedoločeni sistemi

Naloge

1. Poiščite točko ravnine
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5,$$
ki leži najbliže koordinatnemu izhodišču.

   Rešitev: Rešujemo sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = 5 \quad \text{in} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T.$$
Sistem je nedoločen in ima neskončno rešitev. Iščemo tisto rešitev $\mathbf{x}$, katere druga norma $\|\mathbf{x}\|_2$ je najmanjša. Če je matrika A polnega ranga, kar pomeni, da so vrstice linearno neodvisne, potem obstaja enolična rešitev danega problema, ki jo izračunamo po formuli
$$\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}, \quad AA^T\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{y} = (AA^T)^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = A^T(AA^T)^{-1}\mathbf{b}.$$
V našem primeru dobimo
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right)^{-1} 5 = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$
Iskana točka je tako $T\left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right)$.

2. Poiščite rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
ki ima najmanjšo evklidsko normo.

   Rešitev: Rešitev z najmanjšo evklidsko normo $\|\mathbf{x}\|_2$ iščemo po formuli
$$\mathbf{x} = A^T\mathbf{y},$$
kjer je $\mathbf{y}$ rešitev sistema
$$AA^T\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$
Ker je
$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix},$$
ima ta sistem ($14y_1 + 6y_2 = 1$ in $6y_1 + 3y_2 = 2$) rešitev $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}$. Iskana rešitev nedoločenega sistema je tedaj
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

3. Poiščite rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},$$
z najmanjšo evklidsko normo.

   Rezultat: Rešitev sistema je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

3 Aproksimacija, predoločeni sistemi

Pri aproksimaciji z metodo najmanjših kvadratov iščemo vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki minimizira drugo normo $\|\mathbf{b} - A\,\mathbf{x}\|_2$, kjer je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $m > n$ in matrika A polnega ranga.

Normalni sistem

$$A^T A\,\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.$$

QR razcep

$$R\,\mathbf{x} = Q^T \mathbf{b}, \quad A = Q\,R.$$

Matrika $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ima ortonormirane stolpce ($Q^T Q = I$), matrika $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pa je zgornja trikotna s pozitivnimi diagonalnimi elementi.

Naloge

1. Poiščite vektor $\mathbf{x}$, ki minimizira evklidsko normo $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Iskani vektor $\mathbf{x}$ je rešitev normalnega sistema

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b},$$

ki ima enolično rešitev, če je matrika A polnega ranga. To pomeni, da so stolpci matrike A linearno neodvisni, torej mora biti v tem primeru rang enak 2, kar pa je izpolnjeno. Ker je

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

je rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

enaka $x_1 = -\frac{1}{3}$ in $x_2 = \frac{1}{2}$. Iskani vektor je tedaj $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

2. Poiščite vektor $\mathbf{x}$, ki minimizira evklidsko normo $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Iskani vektor $\mathbf{x}$ je rešitev sistema

$$R\mathbf{x} = Q^T \mathbf{b},$$

kjer je matrika $A = Q\,R$. Napravimo najprej QR razcep matrike A. Prvi stolpec matrike A delimo z njegovo drugo normo in dobimo prvi stolpec matrike Q

$$q_1 = \frac{(1,4,1)}{r_{1,1}} = \frac{(1,4,1)}{3\sqrt{2}} = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{6}, \tfrac{2\sqrt{2}}{3}, \tfrac{\sqrt{2}}{6}\right).$$

Drugi stolpec matrike Q dobimo tako, da od drugega stolpca matrike A odštejemo pravokotno projekcijo drugega stolpca matrike A na prvi stolpec matrike Q

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \tfrac{\sqrt{2}}{6}(1,4,1)\cdot(2,1,1) = \tfrac{7\sqrt{2}}{6}, \\ \tilde{q}_2 &= (2,1,1) - r_{1,2}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{6}, \tfrac{2\sqrt{2}}{3}, \tfrac{\sqrt{2}}{6}\right) = (2,1,1) - \tfrac{7\sqrt{2}}{6}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{6}, \tfrac{2\sqrt{2}}{3}, \tfrac{\sqrt{2}}{6}\right) = \left(\tfrac{29}{18}, -\tfrac{5}{9}, \tfrac{11}{18}\right) \end{aligned}$$

ter nato dobljeni vektor delimo z njegovo drugo normo

$$q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{r_{2,2}} = \frac{\left(\frac{29}{18}, -\frac{5}{9}, \frac{11}{18}\right)}{\frac{\sqrt{118}}{6}} = \left(\tfrac{29\sqrt{118}}{354}, -\tfrac{5\sqrt{118}}{177}, \tfrac{11\sqrt{118}}{354}\right).$$

Neničelni elementi matrike R so koeficienti $r_{1,1}$, $r_{1,2}$ in $r_{2,2}$. Sledi

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{29\sqrt{118}}{354} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{5\sqrt{118}}{177} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{11\sqrt{118}}{354} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & \frac{7\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{118}}{6} \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$Q^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{5\sqrt{118}}{59} \end{bmatrix},$$

dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & \frac{7\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{118}}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{5\sqrt{118}}{59} \end{bmatrix},$$

ki ima rešitev $x_1 = \frac{8}{59}$ in $x_2 = \frac{30}{59}$. Iskani vektor je tedaj $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{8}{59} \\ \frac{30}{59} \end{bmatrix}$.

3. Aproksimirajte podatke v tabeli

x_n	1	2	3
y_n	1	3	4

po metodi najmanjših kvadratov z linearno funkcijo $f(x) = a_1 x + a_2$.

Rešitev: Sestavimo sistem linearnih enačb v matrični obliki $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev, ki minimizira evklidsko normo $\|\mathbf{b} - A\mathbf{a}\|_2$, dobimo iz normalnega sistema $A^TA\mathbf{a} = A^T\mathbf{b}$, kjer je

$$A^TA = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 19 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Ta sistem ima rešitev

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Linearna funkcija, ki najbolje aproksimira podatke iz tabele po metodi najmanjših kvadratov, je

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}.$$

4. Aproksimirajte podatke v tabeli

x_n	1	2	3	4
y_n	3	0	-1	1

po metodi najmanjših kvadratov s polinomom druge stopnje $p(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$ in poiščite najmanjšo vrednost tega polinoma.

Rešitev: Sestavimo sistem linearnih enačb v matrični obliki $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev po metodi najmanjših kvadratov dobimo iz normalnega sistema $A^TA\mathbf{a} = A^T\mathbf{b}$, kjer je

$$A^TA = \begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ta sistem ima rešitev

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ -6.95 \\ 8.75 \end{bmatrix}.$$

Kvadratna funkcija, ki najbolje aproksimira podatke iz tabele po metodi najmanjših kvadratov, je $y = 1.25x^2 - 6.95x + 8.75$. Najmanjšo vrednost tega polinoma dobimo tam, kjer je odvod $y' = 2.50x - 6.95 = 0$, to je pri $x_{\min} = 2.78$, in sicer $y_{\min} = -0.9105$.

5. Aproksimirajte podatke v tabeli

x_n	0	1	2	3	4	5
y_n	1.14	0.89	0.71	0.67	0.64	0.48

po metodi najmanjših kvadratov s funkcijo $f(x) = a_2e^{a_1x}$ tako, da uvedete nove spremenljivke, za katere postane problem linearen.

Rešitev: Nove spremenljivke uvedemo tako, da enačbo $y = a_2e^{a_1x}$ logaritmiramo

$$\log y = \log a_2 + a_1x,$$

označimo

$$Y = \log y \quad \text{in} \quad X = x$$

ter aproksimiramo podatke v tabeli

X_n	0	1	2	3	4	5
Y_n	0.13	-0.12	-0.34	-0.40	-0.45	-0.73

z linearno funkcijo $Y = a_2'X + a_1'$, kjer je $a_1' = \log a_2$ in $a_2' = a_1$. Dobimo sistem enačb $A\mathbf{a}' = \mathbf{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.13 \\ -0.12 \\ -0.34 \\ -0.40 \\ -0.45 \\ -0.73 \end{bmatrix}.$$

Rešimo ga z uporabo normalnega sistema $A^TA\mathbf{a}' = A^T\mathbf{b}$, kjer je

$$A^TA = \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7.45 \\ -1.91 \end{bmatrix}.$$

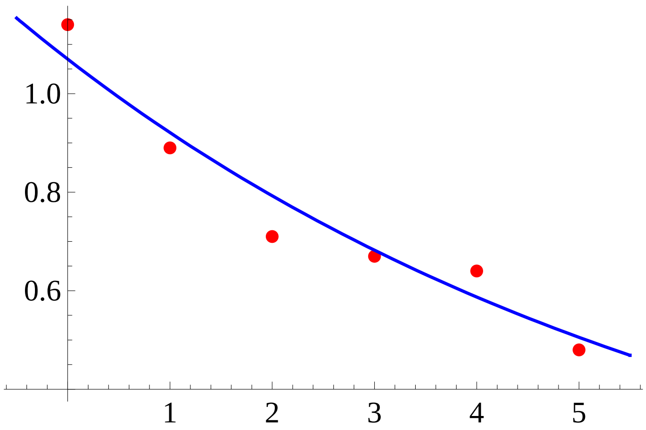
Ta sistem ima rešitev

$$\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.07 \end{bmatrix}.$$

Sledi

$$a_1 = a'_2 = -0.15 \quad \text{in} \quad a_2 = e^{a'_1} = 1.07.$$

Podatke iz tabele aproksimiramo s funkcijo $f(x) = 1.07e^{-0.15x}$ (glejte sliko).



6. Podatke

x	1	2	3	4
y	1	3	2	3

aproksimirajte z linearno funkcijo $y = \alpha x + \beta$ po metodi najmanjših kvadratov ter določite koeficienta α in β.

Rezultati: Koeficienta sta $\alpha = \frac{1}{2}$ in $\beta = 1$, iskana premica je $y = \frac{1}{2}x + 1$.

7. Podatke

x	1	2	3	4
y	2	5	-1	-3

aproksimirajte z linearno funkcijo $y = \alpha x + \beta$ po metodi najmanjših kvadratov ter določite koeficienta α in β.

Rezultati: Koeficienta sta $\alpha = -\frac{21}{10}$ in $\beta = 6$, iskana premica je $y = -\frac{21}{10}x + 6$.

8. Poiščite vektor $\mathbf{x}$, ki minimizira evklidsko normo $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$, kjer je

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Rezultati:

a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ -1 \end{bmatrix}$, d) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

9. Poiščite premici, ki se po metodi najmanjših kvadratov, najbolje prilegata danim točkam.

   a) $T_1(1,2)$, $T_2(2,1)$ in $T_3(3,-1)$,
   b) $T_1(1,1)$, $T_2(2,3)$ in $T_3(3,4)$.

   Rezultati: Iskani premici sta

   a) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{3}$,
   b) $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$.

10. Določite parametra a in b tako, da se bo graf funkcije $y = a + b\,x$ čim bolj prilegal podatkom:

   a) $\left\{(0,1), \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(2, \frac{1}{8}\right)\right\}$,
   b) $\left\{(0,1), \left(1, \frac{1}{3}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right)\right\}$.

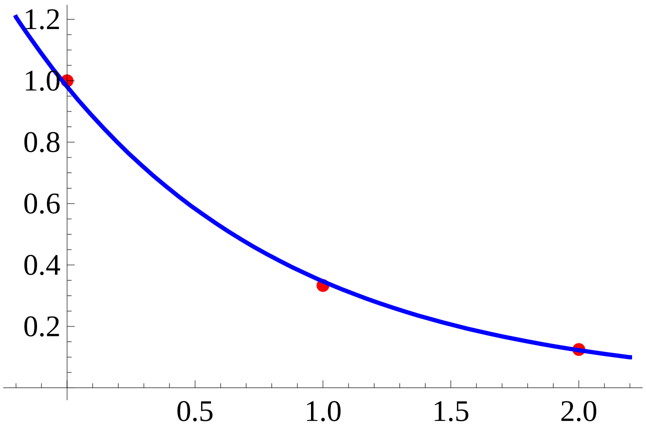
   Rezultati: Iskani parametri in premica so:

   a) $a = \frac{133}{144} = 0.9236$, $b = -\frac{7}{16} = -0.4375$, $y = \frac{133}{144} - \frac{7}{16}x$,
   b) $a = \frac{65}{72} = 0.9028$, $b = -\frac{3}{8} = -0.3750$, $y = -\frac{3}{8}x + \frac{65}{72}$.

11. S pomočjo linearizacije določite parametra a in b tako, da se bo graf funkcije $y = a\,e^{-bx}$ čimbolje prilegal podatkom

$$\left\{(0,1), \left(1, \tfrac{1}{3}\right), \left(2, \tfrac{1}{8}\right)\right\}.$$

   Rezultati: Parametri: $a = 0.9806$, $b = 1.0397$, $y = 0.9806e^{-1.0397x}$ (glejte spodnjo sliko), linearizacija: $\log y = \log a - bx$.



12. Dano tabelo eksperimentalnih podatkov

x_n	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_n	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

   aproksimirajte po metodi najmanjših kvadratov s funkcijo $y = b\,e^{ax}$ tako, da problem linearizirate in dosežete najboljše prileganje grafa funkcije podatkom.

   Rezultati: Parametri: $a = 0.5057$, $b = 3.0725$, $y = 3.0725e^{0.5057x}$, linearizacija: $\log y = \log b + ax$.

13. Dano tabelo eksperimentalnih podatkov

x_n	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00
y_n	0.35	0.54	0.45	0.30	0.17

   aproksimirajte po metodi najmanjših kvadratov s funkcijo $y = x^2 e^{ax}$ tako, da problem linearizirate in dosežete najboljše prileganje grafa funkcije podatkom.

   Rezultati: Parametri: $a = -0.9982$, $y = x^2 e^{-0.9982x}$, linearizacija: $\log \frac{y}{x^2} = ax$.

4 Interpolacija in numerično odvajanje

4.1 Interpolacija in zlepki

Polinomska interpolacija

Klasična oblika:

$$y = p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Newtonov interpolacijski polinom (deljene razlike)

Newtonova oblika:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, x_1, \ldots, x_i]f \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j),$$

kjer je deljena razlika

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_0 = \cdots = x_k, \\ \frac{[x_1,\ldots,x_k]f - [x_0,\ldots,x_{k-1}]f}{x_k - x_0}, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Naloge

1. Določite enačbo parabole skozi točke $T_1(1, 1)$, $T_2(2, 2)$ in $T_3(-2, 1)$.

   Rešitev: Rešujemo sistem

   $$y_i = ax_i^2 + bx_i + c, \quad i = 1, 2, 3,$$

   z neznanimi koeficienti a, b in c. Zapišemo ga v matrični obliki

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Rešitev je $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$ in $c = \frac{1}{2}$. Parabola, ki poteka skozi dane tri točke, je podana s predpisom

   $$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

2. Funkcija f je podana tabelarično

x	2	2.5	4
$f(x)$	0.5	0.4	0.25

   S pomočjo kvadratne interpolacije izračunajte $f(3)$.

   Rešitev: Funkcijo f interpoliramo skozi dane točke s kvadratno funkcijo $p(x) = ax^2 + bx + c$. Ko vstavimo podatke iz tabele, dobimo sistem enačb za iskane koeficiente

   $$\begin{aligned} 0.5 &= 4a + 2b + c, \\ 0.4 &= 6.25a + 2.5b + c, \\ 0.25 &= 16a + 4b + c, \end{aligned}$$

   ki ima rešitev $a = 0.05$, $b = -0.425$ in $c = 0.15$. Iskana kvadratna funkcija je

   $$p(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 0.15,$$

   iskana funkcijska vrednost pa $f(3) \approx p(3) = -0.675$.

3. Funkcija f je podana tabelarično

x	1	2	4	5
$f(x)$	0	2	12	21

S pomočjo kubične interpolacije izračunajte $f(3)$.

Rešitev: Funkcijo f interpoliramo skozi dane točke s kubičnim polinomom

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Ko vstavimo podatke iz tabele, dobimo sistem enačb za iskane koeficiente

$$\begin{aligned} 0 &= a + b + c + d, \\ 2 &= 8a + 4b + 2c + d, \\ 12 &= 64a + 16b + 4c + d, \\ 21 &= 125a + 25b + 5c + d, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $a = \frac{1}{12}$, $b = \frac{5}{12}$, $c = \frac{1}{6}$ in $d = -\frac{2}{3}$. Iskani kubični polinom je

$$p(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{2}{3},$$

iskana funkcijska vrednost pa $f(3) \approx p(3) = \frac{35}{6} = 5.8333$.

4. Dane so tri točke v ravnini

$$A(-2, 1),\ B(1, -1) \quad \text{in} \quad C(3, 2).$$

Skozi te tri točke interpolirajte polinom druge stopnje. Z Newtonovo metodo določite teme tako dobljene parabole.

Rešitev: Vse tri točke vstavimo v enačbo parabole $y = ax^2 + bx + c$ in dobimo sistem

$$\begin{aligned} 1 &= 4a - 2b + c, \\ -1 &= a + b + c, \\ 2 &= 9a + 3b + c, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $a = \frac{13}{30}$, $b = -\frac{7}{30}$ in $c = -\frac{6}{5}$. Torej je enačba parabole

$$y = \frac{13}{30}x^2 - \frac{7}{30}x - \frac{6}{5}.$$

Teme dobimo tam, kjer je odvod $y' = \frac{13}{15}x - \frac{7}{30} = 0$. Za Newtonovo metodo potrebujemo še drugi odvod $y'' = \frac{13}{15}$ in primerno izbran začetni približek, npr. $x_0 = 0$. Rešitev dobimo že po prvem koraku

$$x_1 = x_0 - \frac{y'(x_0)}{y''(x_0)} = \frac{7}{26}.$$

Teme je v točki $T\left(\frac{7}{26}, -\frac{1921}{1560}\right)$.

5. Zapišite Newtonov interpolacijski polinom skozi točke

x_i	-1	1	2	3	4
f_i	2	0	4	-1	-2

Rešitev: Z uporabo formule za deljene razlike, kjer so vse točke x_i različne

$$[x_0, \ldots, x_k]f = \frac{[x_1, \ldots, x_k]f - [x_0, \ldots, x_{k-1}]f}{x_k - x_0},$$

dobimo shemo

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_i & [.]f & [.,.]f & [.,.,.]f & [.,.,.,.]f & [.,.,.,.,.]f \\
\hline
-1 & 2 & & & & \\
 & & -1 & & & \\
1 & 0 & & \frac{5}{3} & & \\
 & & 4 & & -\frac{37}{24} & \\
2 & 4 & & -\frac{9}{2} & & \frac{89}{120} \\
 & & -5 & & \frac{13}{6} & \\
3 & -1 & & 2 & & \\
 & & -1 & & & \\
4 & -2 & & & &
\end{array}.
$$

Newtonov interpolacijski polinom je

$$p(x) = 2 - (x+1) + \frac{5}{3}(x+1)(x-1) - \frac{37}{24}(x+1)(x-1)(x-2) + \frac{89}{120}(x+1)(x-1)(x-2)(x-3).$$

6. Z uporabo deljenih razlik izračunajte $f(8.2)$, če je funkcija f podana tabelarično

$$
\begin{array}{c|ccc}
x_i & 8.0 & 8.1 & 8.3 \\
\hline
y_i & 16.0 & 17.6 & 17.5
\end{array}.
$$

Rešitev: Tabela deljenih razlik je

$$D = \begin{bmatrix} x_0 & [x_0]f = y_0 & & \\ x_1 & [x_1]f = y_1 & [x_0,x_1]f = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} & \\ x_2 & [x_2]f = y_2 & [x_1,x_2]f = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} & [x_0,x_1,x_2]f = \frac{[x_1,x_2]f-[x_0,x_1]f}{x_2-x_0} \end{bmatrix},$$

vrednost funkcije v točki x izračunamo s polinomom

$$p(x) = y_0 + [x_0,x_1]f(x-x_0) + [x_0,x_1,x_2]f(x-x_0)(x-x_1).$$

V našem primeru je tabela deljenih razlik

$$D = \begin{bmatrix} 8.0 & 16.0 & & \\ 8.1 & 17.6 & 16.0 & \\ 8.3 & 17.5 & -0.5 & -55.0 \end{bmatrix},$$

iskana funkcijska vrednost pa

$$p(8.2) = 16.0 + 16.0(8.2-8.0) - 55.0(8.2-8.0)(8.2-8.1) = 18.1.$$

7. Točke (x,y), ki so podane tabelarično

$$
\begin{array}{c|ccccc}
x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
y_i & 1 & 3 & 2 & 0 & 3
\end{array},
$$

interpolirajte s kubičnim zlepkom (p,q), kjer je $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $x \in [0,2]$ in $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, $x \in [2,4]$. V točki $x = 2$ se naj se ujemata še prvi in drugi odvod polinomov $p(x)$ in $q(x)$.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb, ki ima 8 enačb in 8 neznank

$$
\begin{aligned}
y_i = p(x_i) &= a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3, \quad i = 1,2,3, \\
y_j = q(x_j) &= b_0 + b_1x_j + b_2x_j^2 + b_3x_j^3, \quad j = 3,4,5, \\
p'(x_3) &= q'(x_3), \\
p''(x_3) &= q''(x_3).
\end{aligned}
$$

V našem primeru se ta sistem glasi

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 3, \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 2, \\ b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 &= 2, \\ b_0 + 3b_1 + 9b_2 + 27b_3 &= 0, \\ b_0 + 4b_1 + 16b_2 + 64b_3 &= 3, \\ a_1 + 4a_2 + 12a_3 - b_1 - 4b_2 - 12b_3 &= 0, \\ 2a_2 + 12a_3 - 2b_2 - 12b_3 &= 0, \end{aligned}$$

in ima rešitev $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{23}{6}$, $a_2 = -2$, $a_3 = \frac{1}{6}$, $b_0 = -7$, $b_1 = \frac{95}{6}$, $b_2 = -8$ in $b_3 = \frac{7}{6}$. Iskani kubični zlepek (p, q) je tedaj

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + \frac{23}{6}x - 2x^2 + \frac{1}{6}x^3, \quad x \in [0, 2], \\ q(x) &= -7 + \frac{95}{6}x - 8x^2 + \frac{7}{6}x^3, \quad x \in [0, 2]. \end{aligned}$$

8. Interpolirajte polinom druge stopnje skozi točke $T_1(1, 2)$, $T_2(2, 3)$ in $T_3(-3, 1)$. Določite še koordinati temena dobljene parabole.

   Rezultati: Interpolacijski polinom je $y = 0.15x^2 + 0.55x + 1.30$, teme pa $T(-1.8333, 0.7958)$.

9. Dani sta točki $A(-2, 1)$ in $B(1, -1)$ v ravnini. Določite koeficienta a_1 in a_2 tako, da bosta točki A in B ležali na grafu funkcije

   $$f(x) = a_1e^x + a_2e^{2x}.$$

   Graf funkcije f seka abscisno os v natanko eni točki. S pomočjo Newtonove metode poiščite približno vrednost abscise te točke na dve decimalni mesti natančno.

   Rezultati: Koeficienta sta $a_1 = 7.79549$ in $a_2 = -3.00313$, funkcijski predpis $f(x) = 7.79549e^x - 3.00313e^{2x}$, iskana abscisa pa $x_0 = 0.953888$.

10. Poiščite polinom, ki interpolira podatke v tabeli

x	0	1	2	3
$f(x)$	4	3	15	18

.

   Rezultat: Interpolacijski polinom je $p(x) = -\frac{11}{3}x^3 + \frac{35}{2}x^2 - \frac{89}{6}x + 4$.

11. Poiščite Newtonov interpolacijski polinom, ki interpolira tabelarično podane podatke

x_i	1	2.5	5	6.5	9
y_i	2	5	11	14	17

.

   Rezultat: Newtonov interpolacijski polinom je $p(x) = 2 + 2(x-1) + \frac{1}{10}(x-1)(x-2.5) - \frac{2}{55}(x-1)(x-2.5)(x-5) + \frac{3}{1144}(x-1)(x-2.5)(x-5)(x-6.5)$.

12. Poiščite Newtonov interpolacijski polinom p stopnje 5, za katerega velja $p(0) = 4$, $p'(0) = -4$, $p''(0) = 8$, $p(1) = 2$, $p'(1) = -1$ in $p''(1) = 1$.

   Rezultat: Newtonov interpolacijski polinom je $p(x) = 4 - 4x + 4x^2 - 2x^3 + x^3(x-1) - \frac{1}{2}x^3(x-1)^2$.

4.2 Numerično odvajanje

Naloge

1. Določite uteži formule za numerično odvajanje oblike

$$f'(x) \approx \omega_1 f(x-h) + \omega_2 f(x) + \omega_3 f(x+h)$$

tako, da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb, kjer vstavimo $f(x) \in \{1,\ x,\ x^2\}$

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \\ 1 &= \omega_1(x-h) + \omega_2 x + \omega_3(x+h), \\ 2x &= \omega_1(x-h)^2 + \omega_2 x^2 + \omega_3(x+h)^2. \end{aligned}$$

Rešitev mora biti neodvisna od x, kar hitro ugotovimo z upoštevanjem prve enačbe v drugi in tretji, ter dobljene druge enačbe v tretji. Po krajšanju z x dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \\ 1 &= -\omega_1 h + \omega_3 h, \\ 0 &= \omega_1 h^2 + \omega_3 h^2, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $\omega_1 = -\frac{1}{2h}$, $\omega_2 = 0$ in $\omega_3 = \frac{1}{2h}$. Sledi formula za numerično odvajanje oblike

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

2. Določite uteži formule za numerično odvajanje oblike

$$f'(x) \approx \omega_1 f(x-2h) + \omega_2 f(x-h) + \omega_3 f(x)$$

tako, da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb, kjer vstavimo $f(x) \in \{1,\ x,\ x^2\}$

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \\ 1 &= \omega_1(x-2h) + \omega_2(x-h) + \omega_3 x, \\ 2x &= \omega_1(x-2h)^2 + \omega_2(x-h)^2 + \omega_3 x^2. \end{aligned}$$

Rešitev mora biti neodvisna od x, kar hitro ugotovimo z upoštevanjem prve enačbe v drugi in tretji, ter dobljene druge enačbe v tretji. Po krajšanju z x dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \\ 1 &= -2\omega_1 h - \omega_2 h, \\ 0 &= 4\omega_1 h^2 + \omega_2 h^2, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $\omega_1 = \frac{1}{2h}$, $\omega_2 = -\frac{2}{h}$ in $\omega_3 = \frac{3}{2h}$. Sledi formula za numerično odvajanje oblike

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h}.$$

3. Določite uteži kvadraturne formule za odvajanje oblike

$$f'(x) \approx \omega_1 f(x) + \omega_2 f(x+h) + \omega_3 f(x+2h),$$

da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rezultati: Uteži so $\omega_1 = -\frac{3}{2h}$, $\omega_2 = \frac{2}{h}$ in $\omega_3 = -\frac{1}{2h}$.

4. Določite uteži kvadraturne formule za odvajanje oblike

$$f''(x) \approx \omega_1 f(x-2h) + \omega_2 f(x-h) + \omega_3 f(x),$$

da bo točna za polinome stopnje manjše ali enake 2.

Rezultati: Uteži so $\omega_1 = \frac{1}{h^2}$, $\omega_2 = -\frac{2}{h^2}$ in $\omega_3 = \frac{1}{h^2}$.

5 Numerično integriranje

Računamo integrale oblike $\int_a^b f(x)\,dx$. Veljajo oznake: $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = x_0 + i\ h$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (vozli x_i so ekvidistantni), $f_i = f(x_i) = f(x_0 + i\ h)$.

Trapezno pravilo

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,(f_0 + f_1) - \frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi).$$

Sestavljeno trapezno pravilo ima uteži $(1, 2, 2, \ldots, 2, 1)$.

Simpsonovo pravilo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi).$$

Sestavljeno Simpsonovo pravilo ima uteži $(1, 4, 2, 4, 2, \ldots, 4, 2, 4, 1)$.

Triosminsko pravilo

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\,(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi).$$

Sestavljeno triosminsko pravilo ima uteži $(1, 3, 3, 2, 3, 3, 2, \ldots, 2, 3, 3, 1)$.

Pravokotniško (sredinsko) pravilo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2h\ f_1 + \frac{1}{3}h^3 f^{(2)}(\xi).$$

Sestavljeno pravokotniško (sredinsko) pravilo ima uteži $(1, 1, \ldots, 1)$.

Gaussova integracijska pravila

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i\ f(x_i) + Rf.$$

Vozle x_i in uteži ω_i določimo tako, da je pravilo točno za polinome do čim višje stopnje.

Naloge

1. Izračunajte integral

$$I = \int_{-1}^{2} x^3 e^x\,dx$$

s pomočjo trapeznega, Simpsonovega in triosminskega pravila za $n = 6$. Rezultate primerjajte s točno rešitvijo.

Rešitev: Ker je $n = 6$, $a = -1$ in $b = 2$, sledi $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$, vozli pa so v točkah

$$x_i: \quad -1,\ -\tfrac{1}{2},\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ \tfrac{3}{2},\ 2.$$

Izračun integrala s trapeznim pravilom:

$$I_{\text{trapez}} = \frac{h}{2}\Big(f(-1) + 2f(-\tfrac{1}{2}) + 2f(0) + 2f(\tfrac{1}{2}) + 2f(1) + 2f(\tfrac{3}{2}) + f(2)\Big) = 23.6733.$$

Izračun integrala s Simpsonovim pravilom:

$$I_{\text{Simpson}} = \frac{h}{3}\Big(f(-1) + 4f(-\tfrac{1}{2}) + 2f(0) + 4f(\tfrac{1}{2}) + 2f(1) + 4f(\tfrac{3}{2}) + f(2)\Big) = 20.8675.$$

Izračun integrala s triosminskim pravilom:

$$I_{3/8} = \frac{3h}{8}\Big(f(-1) + 3f(-\tfrac{1}{2}) + 3f(0) + 2f(\tfrac{1}{2}) + 3f(1) + 3f(\tfrac{3}{2}) + f(2)\Big) = 21.0865.$$

Za primerjavo, točna vrednost integrala na 4 decimalna mesta je $I = 20.6642$.

2. Izračunajte integral

$$I = \int_{-2}^{1} 2xe^x \, dx$$

z uporabo trapezne in Simpsonove tretjinske formule za $n = 6$. Rezultate primerjajte s točno vrednostjo integrala (per partes).

Rešitev: Ker je $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$ in $f(x) = 2xe^x$, dobimo s trapezno metodo

$$I_{\text{trapez}} = \frac{h}{2}\left(f(-2) + 2f\left(-\tfrac{3}{2}\right) + 2f(-1) + 2f\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 2f(0) + 2f\left(\tfrac{3}{2}\right) + f(1)\right) = 1.04233,$$

s Simpsonovo tretjinsko metodo pa

$$I_{\text{Simpson}} = \frac{h}{3}\left(f(-2) + 4f\left(-\tfrac{3}{2}\right) + 2f(-1) + 4f\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 2f(0) + 4f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1)\right) = 0.819151.$$

Točna vrednost integrala je

$$I = \int_{-2}^{1} 2xe^x \, dx = 2xe^x\Big|_{-2}^{1} - 2\int_{-2}^{1} e^x \, dx = 2xe^x\Big|_{-2}^{1} - 2e^x\Big|_{-2}^{1} = 6e^{-2} = 0.812012.$$

3. Sestavite enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \tfrac{1}{2} f(\xi_1) + \tfrac{1}{2} f(\xi_2),$$

kjer vozla ξ_1 in ξ_2 izberete tako, da bo formula točna za monome $f(x) \in \{1, x, x^2\}$. S pomočjo dobljene formule izračunajte približno vrednost integrala

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\, dx$$

in jo primerjajte s točno vrednostjo.

Rešitev: Za $f(x) = 1$ je pogoj na prazno izpolnjen. Za $f(x) = x$ in $f(x) = x^2$ zapišimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\, dx &= \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\xi_1 + \xi_2\right), \\
\int_0^1 x^2\, dx &= \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right),
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $\xi_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Gornji integral izračunamo z dobljeno formulo

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\, dx \approx \tfrac{1}{2}\left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right) = 0.616191$$

in rezultat primerjamo s točno vrednostjo $I = \frac{2}{\pi} \approx 0.63662$.

4. Sestavite enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \omega_0 f\left(-\tfrac{1}{2}\right) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f\left(\tfrac{1}{2}\right),$$

da bo točna za polinome stopnje ≤ 2. S pomočjo dobljene formule izračunajte približno vrednost integrala

$$\int_{-1}^{1} xe^x\, dx$$

in jo primerjajte s točno vrednostjo.

Rešitev: Najprej določimo uteži kvadraturne formule tako, da bo točna za monome $f(x) \in \{1, x, x^2\}$. Dobimo sistem enačb

$$
\begin{aligned}
f(x) = 1 \quad &: \quad \int_{-1}^{1} dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2 = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2, \\
f(x) = x \quad &: \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0 = -\tfrac{1}{2}\omega_0 + \tfrac{1}{2}\omega_2, \\
f(x) = x^2 \quad &: \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{4}\omega_0 + \tfrac{1}{4}\omega_2,
\end{aligned}
$$

ki ima rešitev $\omega_0 = \omega_2 = \frac{4}{3}$ in $\omega_1 = -\frac{2}{3}$. Kvadraturna formula je tedaj

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \tfrac{4}{3} f\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{2}{3} f(0) + \tfrac{4}{3} f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Gornji integral izračunamo z dobljeno formulo

$$\int_{-1}^{1} x e^x\,dx \approx \tfrac{2}{3}\left(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}\right) = 0.6948$$

in rezultat primerjamo s točno vrednostjo $I = 0.7358$.

5. Sestavite enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \omega f(\xi_1) + \omega f(\xi_2).$$

Utež ω in vozla ξ_1 in ξ_2 izberite tako, da bo formula točna za monome $f(x) \in \{1, x, x^2\}$. S pomočjo dobljene formule izračunajte približno vrednost integrala

$$\int_{-1}^{1} e^x\,dx$$

in jo primerjajte s točno vrednostjo.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb

$$
\begin{aligned}
f(x) = 1 \quad &: \quad \int_{-1}^{1} dx = 2 = 2\omega, \\
f(x) = x \quad &: \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = \omega\xi_1 + \omega\xi_2, \\
f(x) = x^2 \quad &: \quad \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \tfrac{2}{3} = \omega\xi_1^2 + \omega\xi_2^2,
\end{aligned}
$$

ki ima rešitev $\omega = 1$ in $\xi_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Kvadraturna formula je tedaj

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Gornji integral izračunamo z dobljeno formulo

$$\int_{-1}^{1} e^x\,dx \approx e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} + e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2.3427$$

in rezultat primerjamo s točno vrednostjo $I = e - \frac{1}{e} \approx 2.3504$.

6. Poiščite približno vrednost integrala
$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$$
z enostavnim Gaussovim kvadraturnim pravilom
$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \omega f(\xi) + \omega f(1-\xi).$$
Utež ω in vozel ξ določite tako, da bo formula točna za monome $f(x) \in \{1, x, x^2\}$. Rezultat primerjajte s točno vrednostjo.

Rešitev: Izpolnjeni morajo biti pogoji
$$\int_0^1 x^n\,dx = \omega\xi^n + \omega(1-\xi)^n, \quad n = 0, 1, 2.$$
Od tod dobimo sistem enačb (prvi dve enačbi sta odvisni)
$$\begin{aligned} 1 &= 2\omega, \quad (n=0),\\ \tfrac{1}{2} &= \omega\xi + \omega(1-\xi), \quad (n=1),\\ \tfrac{1}{3} &= \omega\xi^2 + \omega(1-\xi)^2, \quad (n=2), \end{aligned}$$
ki ima rešitev $\omega = \frac{1}{2}$ in $\xi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. Gornji integral izračunamo z dobljeno kvadraturno formulo
$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx \approx \tfrac{1}{2}\left(\xi e^{-\xi^2} + (1-\xi)e^{-(1-\xi)^2}\right) = 0.312754$$
in rezultat primerjamo s točno vrednostjo $I = \frac{e-1}{2e} \approx 0.31606$.

7. Sestavite enostavno kvadraturno formulo oblike
$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \omega f(\xi).$$
Utež ω in vozel ξ izberite tako, da bo formula točna za $f(x) = 1$ in $f(x) = x$. S pomočjo dobljene formule izračunajte približno vrednost integrala
$$\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$
in jo primerjajte z vrednostjo, natančno na štiri decimalna mesta, ki jo dobite s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto funkcije f v okolici točke 0.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb
$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx &= 2 = \omega,\\ \int_{-1}^1 x\,dx &= 0 = \omega\xi, \end{aligned}$$
ki ima rešitev $\omega = 2$ in $\xi = 0$. Sledi
$$\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 2.$$
Razvijemo funkcijo $\sin x$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0 in dobimo
$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots.$$

Nato integriramo po x v mejah od -1 do 1 in dobimo

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \mp \cdots = 2 - \frac{2}{3 \cdot 3!} + \frac{2}{5 \cdot 5!} \mp \cdots .$$

Če želimo, da se delna vsota n členov razlikuje od točne vrednosti za manj kot 10^{-4}, mora biti absolutna vrednost $(n+1)$-ega člena manj kot 10^{-4}. Takšno oceno napake lahko naredimo zato, ker je vrsta alternirajoča. Iz $\frac{2}{(2n-1)(2n-1)!} < 10^{-4}$ sledi, da je $n > 4$ in zato

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 2 - \frac{2}{3 \cdot 3!} + \frac{2}{5 \cdot 5!} - \frac{2}{7 \cdot 7!} = 1.89217.$$

8. Sestavite formulo za približno računanje singularnih integralov oblike

$$\int_0^{\pi/6} \frac{f(x)\, dx}{x^{3/4}} \approx \omega f(\xi),$$

kjer je $0 \le \xi \le \frac{\pi}{6}$. Formula naj bo točna za konstanto in polinom prve stopnje. Po gornji formuli izračunajte približno vrednost integrala

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)\, dx}{x^{3/4}}$$

in jo primerjajte s točno vrednostjo.

Rešitev: Najprej določimo utež ω in vozel ξ tako, da bo formula točna za $f(x) = 1$ in $f(x) = x$. Dobimo sistem

$$\begin{aligned} f(x) = 1 \quad &: \quad \omega = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{x^{3/4}}\, dx = 4x^{1/4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{6}}, \\ f(x) = x \quad &: \quad \omega\xi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x}{x^{3/4}}\, dx = \tfrac{4}{5}x^{5/4}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \tfrac{4}{5}\sqrt[4]{\left(\tfrac{\pi}{6}\right)^5}, \end{aligned}$$

ki ima rešitev

$$\omega = 4\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{6}} = 3.40259, \quad \xi = \tfrac{\pi}{30} = 0.10472.$$

Z uporabo dobljene formule izračunamo integral

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)\, dx}{x^{3/4}} \approx 4\sqrt[4]{\tfrac{\pi}{6}} \cos\tfrac{\pi}{30} = 3.38395.$$

Za primerjavo, točna vrednost integrala je $I = 3.35106$.

9. Sestavite enostavno kvadraturno formulo za singularne integrale oblike

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\, dx \approx \omega_0 f(0) + \omega_1 f\left(\tfrac{1}{2}\right) + \omega_2 f(1).$$

Uteži ω_i, $i = 0, 1, 2$, izberite tako, da bo formula točna za monome $f(x) \in \{1, x, x^2\}$. S pomočjo dobljene formule izračunajte približno vrednost integrala

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{x}}\, dx$$

in jo primerjajte z vrednostjo, natančno na štiri decimalna mesta, ki jo dobite s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto funkcije f v okolici točke 0.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= 2 &= \omega_0+\omega_1+\omega_2,\\
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx &= \tfrac{2}{3} &= \tfrac{1}{2}\omega_1+\omega_2,\\
\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx &= \tfrac{2}{5} &= \tfrac{1}{4}\omega_1+\omega_2,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $\omega_0=\frac{4}{5}$, $\omega_1=\frac{16}{15}$ in $\omega_2=\frac{2}{15}$. Sledi

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{x}}\,dx \approx \tfrac{4}{5}\cos 0+\tfrac{16}{15}\cos\tfrac{1}{4}+\tfrac{2}{15}\cos\tfrac{1}{2}=1.95052.$$

Razvijemo funkcijo $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ v Taylorjevo vrsto v okolici $x=0$,

$$f(x)=1-\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{384}-\dots,$$

in izračunamo integral

$$\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{x^{3/2}}{8}+\frac{x^{7/2}}{384}\right)dx=1.95058.$$

Rezultat se razlikuje od točne vrednosti za manj kot $\frac{1}{46080}=2.17\cdot 10^{-5}$, kolikor je maksimalna vrednost prvega izpuščenega člena v razvoju v Taylorjevo vrsto (alternirajoča vrsta).

10. Poiščite približno vrednost integrala

$$\int_0^{1/2}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$$

s popravljenim Simpsonovim kvadraturnim pravilom za singularne integrale

$$\int_0^{1/2}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx\approx \omega_0 f(0)+\omega_1 f\left(\tfrac{1}{4}\right)+\omega_2 f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

in primerjajte rezultat z vrednostjo, točno na štiri decimalna mesta, ki jo dobite s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto funkcije f v okolici točke 0.

Rešitev: Zapišimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \sqrt{2} &= \omega_0+\omega_1+\omega_2,\\
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx &= \tfrac{\sqrt{2}}{6} &= \tfrac{1}{4}\omega_1+\tfrac{1}{2}\omega_2,\\
\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx &= \tfrac{\sqrt{2}}{20} &= \tfrac{1}{16}\omega_1+\tfrac{1}{4}\omega_2,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $\omega_0=\frac{2\sqrt{2}}{5}$, $\omega_1=\frac{8\sqrt{2}}{15}$ in $\omega_2=\frac{\sqrt{2}}{15}$. Sledi

$$\int_0^{1/2}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}}\,dx\approx\tfrac{\sqrt{2}}{15}\left(6e^0+8e^{-1/16}+e^{-1/4}\right)=1.3477.$$

Razvijemo funkcijo $f(x)=e^{-x^2}$ v Taylorjevo vrsto v okolici $x=0$,

$$f(x)=1-x^2+\frac{x^4}{2}\mp\dots,$$

in izračunamo integral

$$\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-x^{3/2}+\frac{x^{7/2}}{2}\right)dx=\left(2\sqrt{x}-\tfrac{2}{5}x^{5/2}+\tfrac{1}{9}x^{9/2}\right)\Big|_0^{1/2}=1.3484.$$

11. Določite enostavno kvadraturno formulo za integrale oblike

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}\,dx \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\xi)$$

tako, da bo točna za monome $f(x) \in \{1, x, x^2\}$. Pomagajte si z integralom $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = 2$. Izračunajte približno vrednost integralov

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x+1}\, e^{-x}\,dx$ in

b) $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x}\,dx$.

Točna vrednost prvega integrala je $I_1 = 1.37894$, drugega pa $I_2 = 0.886227$. Izračunajte relativno napako v obeh primerih. Poskusite razložiti, zakaj je v prvem primeru napaka mnogo manjša kot v drugem.

Rešitev: Ker je $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1$ in $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = 2$ dobimo sistem enačb

$$1 = \omega_1 + \omega_2, \quad 1 = \omega_2\xi \quad \text{in} \quad 2 = \omega_2\xi^2,$$

ki ima rešitev $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$ in $\xi = 2$. Dobimo $\hat{I}_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.366$ in $\hat{I}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.711$. Relativna napaka $|\hat{I} - I|/I$ je v prvem primeru enaka 0.00937, v drugem primeru pa 0.20212. Razvoj funkcije $\sqrt{x+1}$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0 je

$$\sqrt{x+1} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}x^2 \pm \cdots,$$

kar pomeni, da se ta funkcija dobro aproksimira s polinomom v okolici točke 0, medtem ko se funkcije $\sqrt{x}$ ne da razviti v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0. Odvod v točki 0 gre preko vseh meja.

12. Izračunajte integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}\,\mathrm{d}x$$

s Simpsonovo tretjinsko metodo, kjer interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ razdelite na $n = 6$ enako dolgih podintervalov.

Rezultat: S Simpsonovo metodo dobimo vrednost $I_{\text{Simpson}} = 1.3707682$, točna vrednost je $I_{\text{točna}} = 1.3707622$.

13. Izračunajte integral

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

s Simpsonovo tretjinsko metodo, kjer interval $[0, 2]$ razdelite na $n = 6$ enako dolgih podintervalov.

Rezultat: S Simpsonovo metodo dobimo vrednost $I_{\text{Simpson}} = 1.60543$, točna vrednost je $I_{\text{točna}} = 1.60541$.

14. Izračunajte integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

s Simpsonovo triosminsko metodo

$$\int_a^{a+3h} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(a+3h)\right),$$

kjer interval $[0, 1]$ razdelite na $n = 6$ enako dolgih podintervalov.

Rezultat: S triosminsko metodo dobimo vrednost $I_{3/8} = 0.946085$, točna vrednost je $I_{\text{točna}} = 0.946083$.

15. Izračunajte približno vrednost naslednjih integralov:

a) $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^{1/4}}\,dx$, b) $I = \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{e^x - 1}}\,dx$.

Rezultati: a) $I = 0.5284$, b) $I = 2.4084$.

16. Izračunajte približno vrednost naslednjih integralov na 4 decimalna mesta natančno:

a) $I = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$, b) $I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$, c) $I = \int_0^{0.1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Rezultati: a) $I = 1.8090$, b) $I = 2.9253$, c) $I = 0.6120$.

17. Določite uteži ω_0, ω_1, ω_2 tako, da bo kvadraturna formula točna za polinome najvišje možne stopnje:

a) $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}\,dx \approx \omega_0 f(0) + \omega_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + \omega_2 f(1)$,

b) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \omega_1 f\left(-\frac{1}{3}\right) + \omega_2 f\left(\frac{2}{3}\right)$.

Rezultati:

a) $\omega_0 = \frac{2}{15}$, $\omega_1 = \frac{16}{15}$, $\omega_2 = \frac{4}{5}$,

b) $\omega_1 = \frac{4}{3}$, $\omega_2 = \frac{2}{3}$.

18. Sestavite formulo za približno računanje integralov oblike

$$\int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x}} \approx \omega f(\xi),$$

kjer je $0 \le \xi \le 1$. Formula naj bo točna za konstanto in polinom prve stopnje. Po gornji formuli izračunajte približno vrednost integrala

$$\int_0^1 \frac{(1+x^2)\,dx}{\sqrt{x}}$$

in jo primerjajte s točno vrednostjo.

Rezultati: Utež: $\omega = 2$, vozel: $\xi = \frac{1}{3}$, približna: $I = 2.2222$, točna: $I = 2.4$.

19. Določite uteži ω_0, ω_1 in ω_2 ter vozel ξ tako, da bo kvadraturna formula

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \omega_0 f(0) + \omega_1 f(\xi) + \omega_2 f(1)$$

točna za polinome najvišje možne stopnje. Izračunajte približno vrednost naslednjih integralov ter jih primerjajte s točno vrednostjo na 3 decimalna mesta natančno, ki jo izračunate s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto:

a) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{1/4}}\,dx$, b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$, c) $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Rezultati: Uteži so $\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6}$ in $\omega_1 = \frac{2}{3}$, vozel pa $\xi = \frac{1}{2}$.

a) Približna: $I = 0.5203$, točna: $I = 0.5284$.

b) Približna: $I = 0.5923$, točna: $I = 0.6205$.

c) Približna: $I = 0.3347$, točna: $I = 0.3324$.

20. Določite utež in vozel kvadraturnih formul

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}\,dx \approx \omega f(\xi)$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt[5]{x}}\,dx \approx \omega f(\xi)$,

kjer je $0 < \xi < 1$, da bosta točni za $f(x) = 1$ in $f(x) = x$. Z uporabo teh formul nato izračuanjte približno vrednost integralov:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x}}\,dx$.

Rezultati:

a) Utež: $\omega = \frac{3}{2}$, vozel: $\xi = \frac{2}{5}$, približna: $I = \frac{3}{2}e^{2/5} = 2.23774$, točna: 2.34359.

b) Utež: $\omega = \frac{5}{4}$, vozel: $\xi = \frac{4}{9}$, približna: $I = \frac{5}{4}\sin\frac{4}{9} = 0.537445$, točna: 0.513108.

21. Določite utež in vozel kvadraturne formule

$$\int_0^h \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \approx \omega f(\xi),$$

kjer je $0 < \xi < h$, da bo točna za $f(x) = 1$ in $f(x) = x$. Z dobljeno formulo izračunajte še približno vrednost integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Rezultati: Utež: $\omega = 2\sqrt{h}$, vozel: $\xi = \frac{h}{3}$, približna: $I = 1.2533$, točna: $I = 1.09855$.

22. Določite uteži kvadraturne formule

$$\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx \approx \omega_1 f\left(\tfrac{1}{4}\right) + \omega_2 f(1),$$

da bo formula točna za $f(x) = 1$ in $f(x) = x$. Z uporabo te formule nato izračuanjte približno vrednost integrala

$$\int_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Rezultati: Uteži: $\omega_1 = \frac{8\sqrt{2}}{9}$, $\omega_2 = \frac{10\sqrt{2}}{9}$, približna: $I = 5.8855$, točna: $I = 6.6877$.

23. Sestavite enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \omega_1 f(\xi_1) + \omega_2 f(\xi_2).$$

Uteži ω_1 in ω_2 ter vozla ξ_1 in ξ_2 izberite tako, da bo formula točna za monome $f(x) \in \{1, x, x^2, x^3\}$. S pomočjo dobljene formule izračunajte približno vrednost integrala $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^x - 1}{x}\,dx$ in jo primerjajte s točno vrednostjo.

Rezultati: Uteži: $\omega_1 = \omega_2 = 1$, vozla: $\xi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\xi_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, približna: $I = 2.11298$, točna: $I = 2.1145$.

24. Sestavite enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx \approx \omega_1 f(\xi_1) + \omega_2 f(\xi_2).$$

Uteži ω_1 in ω_2 ter vozla ξ_1 in ξ_2 izberite tako, da bo formula točna za monome $f(x) \in \{1, x, x^2, x^3\}$. S pomočjo dobljene formule izračunajte približno vrednost integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ in jo primerjajte s točno vrednostjo.

Rezultati: Uteži: $\omega_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{30}}{18}$, vozla: $\xi_{1,2} = \frac{3}{7} \mp \frac{2\sqrt{30}}{35}$, približna: $I = 0.620331$, točna: $I = 0.620537$.

25. Sestavite enostavno Gaussovo kvadraturno formulo oblike

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \omega f(-\xi) + \omega f(\xi).$$

Utež ω in vozel ξ izberite tako, da bo formula točna za polinome čim višje stopnje. S pomočjo dobljene formule izračunajte približno vrednost integrala $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x \sin x\,dx$ in jo primerjajte s točno vrednostjo.

Rezultati: Utež: $\omega = 1$, vozel: $\xi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, približna: $I = 0.665844$, točna: $I = 0.663494$.

26. Sestavite enostavno Gaussovo kvadraturno formulo oblike

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \omega f(\xi) + \omega f(1-\xi).$$

Utež ω in vozel ξ izberite tako, da bo formula točna za polinome čim višje stopnje. S pomočjo dobljene formule izračunajte približno vrednost integrala $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-x} \sin x\,dx$ in jo primerjajte s točno vrednostjo.

Rezultati: Utež: $\omega = \frac{1}{2}$, vozel: $\xi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, približna: $I = 0.246096$, točna: $I = 0.245837$.

27. Z uporabo kvadraturne formule iz naloge 11. določite približno vrednost integrala

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx.$$

Rezultat: Integral je $I = 0.6$.

28. Izračunajte integral

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

s pomočjo Gaussove formule

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \omega f(\xi_1) + \omega f(\xi_2), \quad \xi_i \in (-1, 1),$$

in Simpsonove formule

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{3} f(-1) + \tfrac{4}{3} f(0) + \tfrac{1}{3} f(1)$$

ter ga primerjajte s točno vrednostjo. Uteži in vozla izberite tako, da bo formula točna za polinome do čim višje stopnje.

Rezultati: Utež: $\omega = 1$, vozla: $\xi_{1,2} = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}$, približna: $I_{\text{Gauss}} = 1.89073$, $I_{\text{Simpson}} = 1.89431$, točna: $I = 1.89217$.

29. Izračunajte integral

$$\int_{-1}^{1} e^x \, dx$$

s pomočjo Gaussove formule

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, dx \approx \omega f(\xi_1) + \omega f(\xi_2), \quad \xi_i \in (-1, 1),$$

in pravokotniške formule

$$\int_{-1}^{1} f(x) \, dx \approx 2f(0)$$

ter ga primerjajte s točno vrednostjo. Uteži in vozla izberite tako, da bo formula točna za polinome do čim višje stopnje.

Rezultati: Utež: $\omega = 1$, vozla: $\xi_{1,2} = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}$, približna: $I_{\text{Gauss}} = 2.3427$, $I_{\text{pravokotnik}} = 2.0000$, točna: $I = 2.3504$.

30. Določite enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_{a}^{a+h} f(x) \, dx \approx \omega f(\xi).$$

Utež ω in vozel $\xi \in [a, a+h]$ določite tako, da bo formula točna za $f(x) = 1$ in $f(x) = x$. S pomočjo sestavljene formule izračunajte približno vrednost integrala

$$\int_{0}^{1} \frac{\sin(x)}{x} \, dx$$

in ga primerjajte s točno vrednostjo. Interval $[0, 1]$ razdelite na $n = 4$ enake dele.

Rezultat: Utež: $\omega = h$, vozel: $\xi = a + \frac{h}{2}$, približna: $I = 0.950743$, točna: $I = 0.946083$.

31. Določite enostavno kvadraturno formulo oblike

$$\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x} \, dx \approx \omega_1 f(\xi_1) + \omega_2 f(\xi_2),$$

kjer je $\omega_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ tako, da bo formula točna za $f(x) = 1$, $f(x) = x$ in $f(x) = x^2$. S pomočjo dobljene formule izračunajte približno vrednost integrala

$$\int_{0}^{\infty} \sqrt{x+1}e^{-x} \, dx.$$

Točna rešitev je $I = 1.37894$. Izračunajte še relativno napako.

Rezultat: Uteži: $\omega_{1,2} = \frac{2\mp\sqrt{2}}{4}$, vozla: $\xi_{1,2} = 2 \mp \sqrt{2}$, približna: $I = 1.97774$, tocna: $I = 1.37894$, relativna napaka: 0.30.

32. Določite uteži ω_1, ω_2 in parameter h kvadraturne formule

$$\int_{0}^{1} f(x) \, dx \approx \omega_1 f\left(\tfrac{1}{2} - h\right) + \omega_2 f\left(\tfrac{1}{2} + h\right)$$

tako, da bo formula točna za $f(x) = 1$, $f(x) = x$ in $f(x) = x^2$. S pomočjo dobljene formule izračunajte približno vrednost integrala

$$\int_{0}^{1} e^{\sqrt{x}} \, dx$$

in jo primerjajte s točno vrednostjo. Ugotovite, ali formula točno izračuna tudi integrale, kjer je funkcija f polinom tretje stopnje.

Rezultati: Po formuli je približna vrednost $I = 2.00702$, točna vrednost pa $I = 2$. Uteži sta $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$ in parameter $h = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Formula je točna tudi za polinome tretje stopnje.

6 Robni problemi

Končne razlike (diference) za prvi odvod

$$
\begin{aligned}
f'(x) &\approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}, \quad \text{napaka reda } \mathcal{O}\left(h^2\right) \quad \text{(centralna)},\\
f'(x) &\approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \text{napaka reda } \mathcal{O}(h) \quad \text{(prema)},\\
f'(x) &\approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \quad \text{napaka reda } \mathcal{O}(h) \quad \text{(obratna)}.
\end{aligned}
$$

Centralna končna razlika (diferenca) za drugi odvod

$$
f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}, \quad \text{napaka reda } \mathcal{O}\left(h^2\right).
$$

Naloge

1. Rešite robni problem za Airyevo diferencialno enačbo

$$
y''(x) = -16\, x\, y(x), \quad y(0)=1, \quad y(1)=0.
$$

Izberite korak $h=\frac{1}{4}$. Drugi odvod nadomestite s centralno končno razliko

$$
y''(x_k) \approx \frac{y_{k-1}-2y_k+y_{k+1}}{h^2}, \quad k=1,2,3,
$$

kjer je

$$
y_0 = y(0) = 1 \quad \text{in} \quad y_4 = y(1) = 0.
$$

Rešitev: Centralno končno razliko vstavimo v diferencialno enačbo in množimo s h^2

$$
y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = -16h^2 x_k y_k.
$$

Z upoštevanjem vrednosti za h dobimo sistem linearnih enačb

$$
y_{k-1} + (x_k - 2)y_k + y_{k+1} = 0, \quad k=1,2,3,
$$

katerega razširjena matrika sistema je

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
-\frac{7}{4} & 1 & 0 & -1\\
1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0\\
0 & 1 & -\frac{5}{4} & 0
\end{array}\right]
$$

in ima rešitev

$$
y_1 = \tfrac{28}{9}, \quad y_2 = \tfrac{40}{9} \quad \text{in} \quad y_3 = \tfrac{32}{9}.
$$

2. Rešite robni problem

$$
y''(x) = -1, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1
$$

tako, da razdelite interval $[0,1]$ na tri podintervale in v notranjih krajiščih zapišete pogoj

$$
\frac{y_{k-1} - 2\,y_k + y_{k+1}}{h^2} = -1.
$$

Ali se lahko gornji linearni sistem enačb rešuje s pomočjo Jacobijeve iteracije?

Rešitev: Centralno končno razliko vstavimo v diferencialno enačbo in z upoštevanjem vrednosti za $h=\frac{1}{3}$ dobimo sistem linearnih enačb

$$
9y_{k-1} - 18y_k + 9y_{k+1} = -1, \quad k=1,2,
$$

kjer je $y_0 = y(0) = 0$ in $y_3 = y(1) = 1$. Sistem v matrični obliki se glasi

$$\begin{bmatrix} -18 & 9 \\ 9 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

in ima rešitev

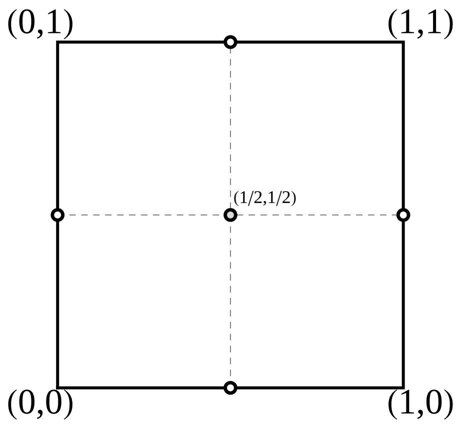
$$y_1 = \tfrac{4}{9} \quad \text{in} \quad y_2 = \tfrac{7}{9}.$$

Gornji linearni sistem enačb lahko rešimo s pomočjo Jacobijeve iteracije, saj je matrika koeficientov diagonalno dominantna.

3. Rešite robni problem v dveh dimenzijah

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2 - 1, \quad \text{na območju} \quad \mathcal{D} &= [0,1] \times [0,1], \\ \text{na robu območja:} \quad u(x,y)|_{\partial\mathcal{D}} &= x - y. \end{aligned}$$

Druge parcialne odvode nadomestite s centralnimi končnimi razlikami. Koliko je približna vrednost $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, če izberete korak $h = \frac{1}{2}$?



Rešitev: Z vpeljavo centralnih končnih razlik v notranjih točkah dobimo sistem enačb

$$\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4 + u_{i,j}}{h^2} = x_i^2 + y_j^2 - 1.$$

Ker imamo v našem primeru eno samo notranjo točko, dobimo eno samo enačbo

$$\frac{u_{0,1/2} + u_{1,1/2} - 4u_{1/2,1/2} + u_{1/2,0} + u_{1/2,1}}{\frac{1}{2^2}} = x_{1/2}^2 + y_{1/2}^2 - 1,$$

kjer je $u_{0,1/2} = -\frac{1}{2}$, $u_{1,1/2} = \frac{1}{2}$, $u_{1/2,0} = \frac{1}{2}$, $u_{1/2,1} = -\frac{1}{2}$, $x_{1/2} = \frac{1}{2}$ in $y_{1/2} = \frac{1}{2}$. Sledi

$$-16u_{1/2,1/2} = x_{1/2}^2 + y_{1/2}^2 - 1 - 4\left(u_{0,1/2} + u_{1,1/2} + u_{1/2,0} + u_{1/2,1}\right) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} - 1 + 2 - 2 - 2 + 2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Dobimo rešitev

$$u\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \approx u_{1/2,1/2} = \tfrac{1}{32} = 0.0313.$$

4. Rešite robni problem

$$y''(x) = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

tako, da razdelite interval $[0,1]$ na štiri podintervale in v notranjih krajiščih zapišete pogoj

$$\frac{y_{k-1} - 2\,y_k + y_{k+1}}{h^2} = -x_k.$$

Gornji sistem linearnih enačb rešite s pomočjo Gaussove eliminacije z delim pivotiranjem. Poiščite točno rešitev. Ali se lahko gornji linearni sistem enačb rešuje s pomočjo Jacobijeve iteracije?

Rezultati: Približne vrednosti: $y \approx [0, 0.218938, 0.4375, 0.695313, 1]$, točna rešitev: $y = \frac{1}{6}(7x - x^3)$, točne vrednosti: $y = [0, 0.289063, 0.5625, 0.804688, 1]$. Gornji linearni sistem enačb lahko rešimo s pomočjo Jacobijeve iteracije, saj je matrika koeficientov diagonalno dominantna.

5. Rešite robni problem
$$y''(x) = -2x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$
kjer interval $[0,1]$ razdelite na $n = 4$ enako dolge podintervale. Ali lahko gornji sistem enačb rešimo z Gauss-Seidlovo iteracijo?

Rezultati: Približne vrednosti: $y_1 = \frac{37}{64}$, $y_2 = \frac{9}{8}$, $y_3 = \frac{103}{64}$. Sistem lahko rešimo z Gauss-Seidlovo iteracijo, saj je matrika koeficientov diagonalno dominantna.

6. Rešite robni problem
$$y''(x) = -12\,x^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$
tako, da razdelite interval $[0,1]$ na tri podintervale in v notranjih krajiščih zapišete pogoj
$$\frac{y_{k-1} - 2\,y_k + y_{k+1}}{h^2} = -12x_k^2.$$
Ali se lahko gornji linearni sistem enačb rešuje s pomočjo Gauss-Seidlove iteracije? Poiščite točno rešitev.

Rezultati: Približne vrednosti: $y \approx [0, 0.6296, 1.1111, 1]$, točna rešitev: $y = 2x - x^4$, točne vrednosti: $y = [0, 0.6543, 1.1358, 1]$. Gornji linearni sistem enačb lahko rešimo s pomočjo Gauss-Seidlove iteracije, saj je matrika koeficientov diagonalno dominantna.

7. Rešite robni problem
$$y'' - 2y = 3x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0,$$
kjer interval $[0,1]$ razdelite na $n = 3$ enako dolge podintervale. Drugi odvod v notranjih točkah aproksimirajte s centralno končno razliko.

Rezultati: V notranjih točkah dobimo vrednosti $y_1 = \frac{142}{319} = 0.445141$ in $y_2 = \frac{32}{319} = 0.100313$.

8. Rešite robni problem
$$y'' + y' - 3y = x, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 1,$$
kjer interval $[0,1]$ razdelite na $n = 3$ enako dolge podintervale. Prvi in drugi odvod v notranjih točkah aproksimirajte s centralnima končnima razlikama.

Rezultati: V notranjih točkah dobimo vrednosti $y_1 = \frac{235}{207} = 1.13527$ in $y_2 = \frac{422}{483} = 0.873706$.

9. Rešite robni problem v dveh dimenzijah:

   a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ na območju $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$,
   na robu območja: $u(x,y)|_{\partial\mathcal{D}} = x^2 - y^2 + 2^x$,

   b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$ na območju $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$,
   na robu območja: $u(x,y)|_{\partial\mathcal{D}} = x - y$.

   Druge parcialne odvode nadomestite s centralnimi končnimi razlikami. Koliko je približna vrednost $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, če izberete korak $h = \frac{1}{2}$ (glej sliko pri nalogi 3.)?

   Rezultati:

   a) Vrednost $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \approx \frac{3+2\sqrt{2}}{4} = 1.4571$.
   b) Vrednost $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \approx -\frac{1}{16} = -0.0625$.

10. Rešite robni problem v dveh dimenzijah
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{na območju} \quad \mathcal{D} = [0, \tfrac{3}{2}] \times [0,1],$$
$$\text{na robu območja} \quad u(x,y)|_{\partial\mathcal{D}} = x + y.$$
Druge parcialne odvode nadomestite z centralnimi končnimi razlikami, kjer izberete $h = \frac{1}{2}$. Koliko sta približni vrednosti $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in $u(1, \frac{1}{2})$?

Rezultati: Iskani vrednosti sta $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \approx 1$ in $u(1, \frac{1}{2}) \approx \frac{1}{2}$.

7 Diferencialne enačbe, začetni problemi

Rešujemo začetne probleme $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, kjer je $x_{k+1} = x_k + h$, $h > 0$.

Eulerjeva metoda

$$y_{k+1} = y_k + h\, f\,(x_k, y_k)\,.$$

Modificirana Eulerjeva metoda (metoda srednje vrednosti)

$$y_{k+1} = y_k + h\, f\left(x_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2} f\,(x_k, y_k)\right).$$

Tapezna (Heunova) metoda

$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{h}{2}\left(f\,(x_k, y_k) + f\,(x_{k+1}, y_{k+1})\right).$$

Naloge

1. Numerično rešite diferencialno enačbo

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

z navadno Eulerjevo in trapezno metodo. Če je enačba $y' = f(y)$, potem je

a) Eulerjeva metoda: $y_{k+1} = y_k + hf(y_k)$,

b) trapezna metoda: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(y_k) + f(y_{k+1}))$.

Izberite korak $h = \frac{1}{2}$ in napravite 4 korake po prvi in drugi metodi. Rezultate, ki jih dobite, primerjajte s točno rešitvijo. Katera metoda je natančnejša?

Rešitev: Točna rešitev je $y(x) = e^x$, pri obeh numeričnih metodah pa upoštevamo $f(y) = y$. Označimo še $y_0 = y(0)$. Z Eulerjevo metodo dobimo

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy_0 = y_0(1+h), \\ y_2 &= y_1 + hy_1 = y_0(1+h)^2, \\ &\dots \\ y_n &= y_0(1+h)^n, \end{aligned}$$

s trapezno metodo pa

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = y_0 \frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}, \\ y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) = y_0 \left(\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}\right)^2, \\ &\dots \\ y_n &= y_0 \left(\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}\right)^n. \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $h = \frac{1}{2}$ in $y_0 = 1$, in dobimo naslednje vrednosti, ki so zapisane v tabeli:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
točna	1.0000	1.6487	2.7183	4.4817	7.3891
trapezna	1.0000	1.6667	2.7778	4.6296	7.7160
Euler	1.0000	1.5000	2.2500	3.3750	5.0625

Opazimo, da je trapezna metoda natančnejša od Eulerjeve metode.

2. Numerično rešite diferencialno enačbo

$$y' = -y, \quad y(0) = 1,$$

z navadno Eulerjevo in trapezno metodo. Izberite korak $h = \frac{1}{2}$ in izračunajte približno vrednost $y(1)$ z obema metodama. Funkcija y je padajoča in v limiti, ko x narašča čez vse meje, gre proti nič. Največ kolikšen je lahko korak h po eni in po drugi metodi, da numerična rešitev ohrani ti dve lastnosti?

Rešitev: Zapišimo formulo za izračun funkcijskih vrednosti y_n po obeh metodah in označimo $y_0 = y(0)$.

a) Eulerjeva metoda

$$y_n = y_{n-1} - hy_{n-1} = y_{n-1}(1-h) = y_0(1-h)^n.$$

Približna vrednost za $y(1)$ je tedaj $y_2 = 1\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.25$.

b) Trapezna metoda

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + \tfrac{h}{2}(-y_{n-1} - y_n) \\ y_n\left(1 + \tfrac{h}{2}\right) &= y_{n-1}\left(1 - \tfrac{h}{2}\right) \\ y_n &= y_{n-1}\frac{1 - \frac{h}{2}}{1 + \frac{h}{2}} = y_0\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n \end{aligned}$$

Približna vrednost za $y(1)$ je tedaj $y_2 = 1\frac{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^2} = 0.36$.

Točna rešitev te diferencialne enačbe je $y(x) = e^{-x}$, vrednost $y(1)$ na 6 decimalnih mest pa je enaka $y(1) = e^{-1} \approx 0.367879$. Opazimo, da je trapezna metoda bistveno natančnejša.

Da numerična rešitev ohrani iskani lastnosti, mora biti v prvem primeru izpolnjeno $|1-h| < 1$, to pomeni, da mora biti $0 < h < 1$. V drugem primeru pa za vsak pozitiven $h > 0$ velja

$$\left|\frac{1 - \frac{h}{2}}{1 + \frac{h}{2}}\right| < 1.$$

Ker mora dodatno veljeti še, da je $1 - \frac{h}{2} > 0$, mora biti v drugem primeru $0 < h < 2$.

3. Z uporabo modificirane Eulerjeve metode rešite diferencialno enačbo

$$y' = -2y, \qquad y(0) = 1.$$

Interval $[0, 1]$ razdelite na $n = 4$ enako dolge podintervale ter poiščite numerično rešitev v točki $x = 1$.

Rešitev: Ker je desna stran enačbe $f(x, y) = -2y$, se modificirana Eulerjeva metoda poenostavi v

$$y_{n+1} = y_n - 2h\left(y_n - hy_n\right) = y_n\left(1 - 2h + 2h^2\right).$$

Korak je $h = \frac{1}{4}$, zato je $1 - 2h + 2h^2 = \frac{5}{8}$. Sledi

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \tfrac{5}{8}, \quad y_2 = \tfrac{25}{64}, \quad y_3 = \tfrac{125}{512} \quad \text{in} \quad y_4 = \tfrac{625}{4096}.$$

Točno rešitev poiščemo z ločitvijo spremenljivk in dobimo $y(x) = e^{-2x}$. Numerična rešitev v točki $x = 1$ je $y_4 = \frac{625}{4096} \approx 0.1526$, točna pa $y(1) = e^{-2} \approx 0.1353$.

4. Numerično rešite diferencialno enačbo

$$y' = -y, \quad y(0) = 1.$$

Izberite korak $h = \frac{1}{10}$ in določite $y(1)$ z metodo, ki jo izpeljemo iz razvoja v Taylorjevo vrsto do vključno kvadratnega člena. Primerjajte dobljeno rešitev s točno rešitvijo in rešitvijo, ki jo dobimo z navadno Eulerjevo metodo. Točna rešitev diferencialne enačbe je monotono padajoča funkcija, katere limita je enaka nič, ko x raste čez vse meje. Primerjajte opisano metodo z navadno Eulerjevo metodo in ugotovite pri obeh, za katere pozitivne vrednosti koraka h približna rešitev ohranja obe oziroma eno od lastnosti.

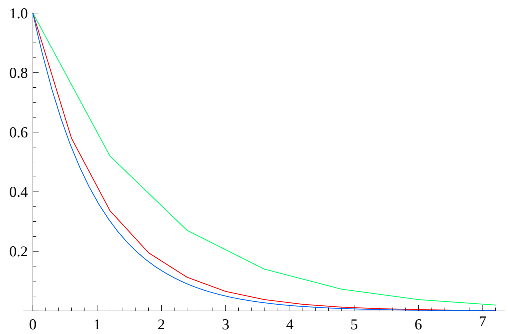
Rešitev: Razvoj v Taylorjevo vrsto do vključno kvadratnega člena je

$$y(x+h) \approx y(x) + y'(x)h + y''(x)\tfrac{h^2}{2}.$$

Sledi formula, kjer označimo $y_0 = y(0)$

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} - y_{n-1}\,h + y_{n-1}\tfrac{h^2}{2} = \tfrac{y_{n-1}}{2}\left(2 - 2h + h^2\right) \\ &= \tfrac{y_{n-1}}{2}\left(1 + (1-h)^2\right) = y_0\left(\tfrac{1}{2}\left(1 + (1-h)^2\right)\right)^n. \end{aligned}$$

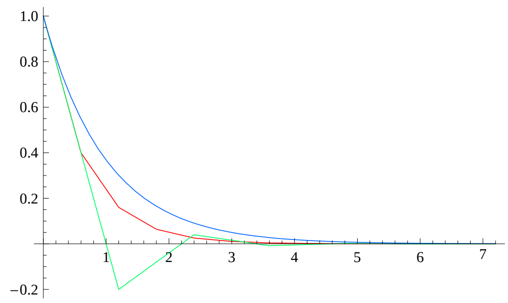
Približna vrednost za $y(1)$ s korakom $h = \frac{1}{10}$ po tej metodi je $y(1) \approx 0.368541$, medtem ko je točna rešitev enaka $y(1) = 1/e \approx 0.367879$. Izraz $\frac{1}{2}(1 + (1-h)^2)$ je vedno pozitiven (sledi monotonost) in je manjši od 1 za pozitivne h, ki so manj od 2 (sledi padanje proti 0). Od tod velja, da se za $0 < h < 2$ ohranita obe lastnosti. Na spodnji sliki so prikazane rešitve s korakoma $h = 0.6$ in $h = 1.2$ z opisano metodo in točna rešitev.



Za navadno Eulerjevo metodo velja

$$y_n = y_{n-1} - y_{n-1}\,h = y_0(1-h)^n.$$

Približna vrednost za $y(1)$ s korakom $h = \frac{1}{10}$ po Eulerjevi metodi je $y(1) \approx 0.348678$. Za pozitivne h sta izpolnjeni obe lastnosti, če je $h < 1$. Če je $1 < h < 2$, lastnost monotonosti ni izpolnjena. Če je $h \geq 2$ ni izpolnjena nobena od lastnosti. Na spodnji sliki so prikazane rešitve s korakoma $h = 0.6$ in $h = 1.2$ z Eulerjevo metodo in točna rešitev.



5. Rešite diferencialno enačbo

$$y' = -y, \quad y(0) = 1$$

z dvokoračno Adams-Bashforthovo metodo drugega reda

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})\right),$$

kjer za korak izberete $h = \frac{1}{2}$. Izračunajte približne vrednosti rešitve v točkah $x \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$, kjer numerično vrednost v točki $x = \frac{1}{2}$ poiščete z modificirano Eulerjevo metodo

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right).$$

Rešitev: Najprej izračunamo $y_1 \approx y(\frac{1}{2})$ z modificirano Eulerjevo metodo, kjer je $f(x, y) = -y$, $y_0 = y(0) = 1$ in $h = \frac{1}{2}$. Dobimo

$$y_1 = y_0 - h\left(y_0 - \tfrac{h}{2}y_0\right) = \tfrac{5}{8} = 0.625.$$

Nato z dvokoračno Adams-Bashforthovo metodo drugega reda izračunamo naslednja približka

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \tfrac{h}{2}(-3y_1 + y_0) = \tfrac{13}{32} = 0.40625, \\ y_3 &= y_2 + \tfrac{h}{2}(-3y_2 + y_1) = \tfrac{33}{128} = 0.257813. \end{aligned}$$

Za primerjavo: točna vrednost rešitve $y = e^{-x}$ v točki $x = \frac{3}{2}$ na šest decimalnih mest je 0.223130.

6. Poiščite točno rešitev diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2}t\,y, \quad y(0) = 1.$$

Prepričajte se, da je rešitev definirana povsod, zavzame samo pozitivne vrednosti in gre proti 0, ko gre $t \to \infty$. S pomočjo Eulerjeve metode s korakom $h = \frac{1}{2}$ poiščite približno rešitev te diferencialne enačbe. Rešitev, ki jo dobimo, ni vedno pozitivna. Po katerem koraku (za kateri n), postane vrednost y_n prvič negativna?

Rešitev: Točna rešitev diferencialne enačbe je $y(t) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2}$. Numerična rešitev je ($t_n = n\,h$, $y_0 = y(0) = 1$)

$$y_{n+1} = y_n - h\sqrt{2}t_n y_n = y_n\left(1 - \sqrt{2}h^2 n\right).$$

Numerična rešitev postane negativna, ko je $1 - \sqrt{2}h^2 n < 0$. Ker je $h = \frac{1}{2}$, je to izpolnjeno, ko je $n > \frac{4}{\sqrt{2}}$ oziroma, ko je $n > 2$.

7. Numerično rešite diferencialno enačbo

$$y' = -x\,y, \quad y(0) = 1,$$

z Eulerjevo in trapezno metodo. Izberite korak $h = \frac{1}{2}$ in napravite 3 korake po prvi in drugi metodi. Rezultate, ki jih dobite, primerjajte s točno reštvijo. Katera metoda je natančnejša?

Rezultati: Rezultati so v spodnji tabeli. Trapezna metoda je natančnejša od Eulerjeve metode. Točna rešitev je $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
točna	1.00000	0.88250	0.60653	0.32465	0.13534	0.04394
trapezna	1.00000	0.88889	0.62222	0.33939	0.14141	0.04351
Euler	1.00000	1.00000	0.75000	0.37500	0.09375	0.00000

.

8. Poiščite približno rešitev diferencialne enačbe

$$y' = -y, \quad y(0) = 1,$$

v točki $h > 0$, če za reševanje uporabite

a) modificirano Eulerjevo metodo,

b) trapezno metodo.

Točna rešitev je $y(x) = e^{-x}$ in je pozitivna za vsak x. Njena limita, ko gre x v neskončnost, je enaka 0. Kakšen sme biti korak $h > 0$, da imata ti dve lastnosti tudi približni rešitvi?

Rezultati:

a) Numerična rešitev z modificirano Eulerjevo metodo je $y_n = \left(1 - h - \frac{h^2}{2}\right)^n y_0$, torej $y(h) \approx 1 - h - \frac{h^2}{2}$. Lastnosti se ohranita, če velja $0 < h < -1 + \sqrt{3}$.

b) Numerična rešitev s trapezno metodo je $y_n = \left(\frac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}}\right)^n y_0$, torej $y(h) \approx \frac{1-\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}}$. Lastnosti se ohranita, če velja $0 < h < 2$.

9. Z uporabo modificirane Eulerjeve metode rešite diferencialno enačbo

$$y' = -2y, \qquad y(0) = 2.$$

Interval $[0, 1]$ razdelite na $n = 4$ enako dolge podintervale ter poiščite numerično rešitev v točki $x = 1$.

Rezultati: Numerična rešitev je $y_4 = \frac{625}{2048} \approx 0.3052$, točna pa $y(1) = 2e^{-2} \approx 0.2707$.

10. Rešite diferencialno enačbo

$$y' = -y, \quad y(0) = 1$$

s trapezno metodo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right).$$

Interval $[0, 2]$ razdelite na $n = 4$ enako dolge podintervale in izračunajte numerično rešitev v točki $x = 2$. Točna rešitev $y = e^{-x}$ je padajoča in povsod pozitivna funkcija. Kolikšen mora biti korak h, da bo numerična rešitev ohranjala ti dve lastnosti?

Rezultati: Numerična rešitev je $y_4 = \frac{81}{625} \approx 0.1296$, točna pa $y(2) = e^{-2} \approx 0.135335$. Da bo numerična rešitev padajoča in povsod pozitivna, mora veljati $0 < h < 2$.

11. Z uporabo Runge-Kutta metode četrtega reda

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(x_n, y_n), \\
k_2 &= h\, f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{k_1}{2}\right), \\
k_3 &= h\, f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{k_2}{2}\right), \\
k_4 &= h\, f(x_n + h, y_i + k_3), \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),
\end{aligned}$$

rešite začetni problem

$$y' = -3x^2 y, \quad y(0) = 2.$$

Interval $[0, 1]$ razdelite na $n = 24$ enako dolgih podintervalov. Numerično rešitev s to metodo v točki $x = 1$ primerjajte s točno vrednostjo ter z vrednostima, dobljenima z Eulerjevo in trapezno metodo. Točna rešitev je $y = 2e^{-x^3}$.

Rezultati: Numerične rešitve so $y_{\text{rk4}} = 0.73576$, $y_{\text{euler}} = 0.75504$ in $y_{\text{trapez}} = 0.73615$, točna pa $y(1) = 2e^{-1} \approx 0.73576$.