Univerza v Ljubljani

Fakulteta za elektrotehniko

Andrej Perne

ZBIRKA REŠENIH NALOG IZ MATEMATIKE I

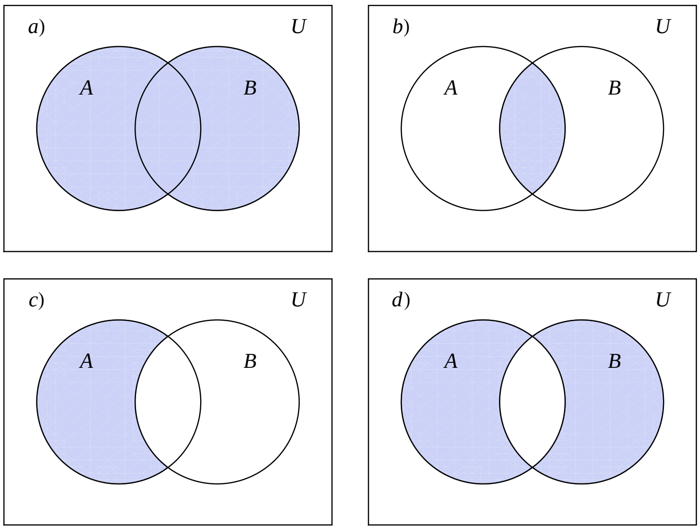
Skripta za vaje iz Matematike I (UNI + VSP)

Ljubljana, 2013

MNOŽICE

Osnovne definicije:

- Množica A je podmnožica B ($A \subseteq B$), če je za vsak $x \in A$ tudi $x \in B$.
- Množici A in B sta enaki ($A = B$) natanko tedaj, ko je $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$.
- Moč množice A ($|A| = m(A)$) je enaka številu elementov v množici.
- Unija množic: $A \cup B = \{x;\, x \in A \vee x \in B\}$.
- Presek množic: $A \cap B = \{x;\, x \in A \wedge x \in B\}$.
- Množici A in B sta disjunktni, če je $A \cap B = \emptyset$.
- Razlika množic: $A - B = \{x;\, x \in A \wedge x \notin B\}$.
- Komplement množice: $A^C = \overline{A} = \mathcal{U} - A = \{x \in \mathcal{U};\, x \notin A\}$.
- Simetrična razlika množic: $A \triangle B := (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
- Potenčna množica: $\mathcal{P}(A) = \{X;\, X \subseteq A\}$.
- Če je $|A| = n$, potem je $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
- Kartezični produkt množic: $A \times B = \{(x, y);\, x \in A, y \in B\}$.



Slika 1: a) Unija množic $A \cup B$. b) Presek množic $A \cap B$. c) Razlika množic $A - B$. d) Simetrična razlika množic $A \triangle B$.

Lastnosti unije in preseka:

- Komutativnost preseka in unije: $A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A.$
- Asociativnost preseka in unije: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$
- Distributivnost: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$
- DeMorganova zakona: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C, \qquad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$

Veljajo enakosti: $A - B = A \cap B^C$, $(A^C)^C = A$, $A \cap A^C = \emptyset$, $A \cup A^C = \mathcal{U}$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \mathcal{U} = A$, $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

1. Dana je univerzalna množica $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ ter množice $A = \{2n;\, n \in \mathbb{N}, n \leq 4\}$, $B = \{n;\, n \in \mathbb{N}, n\,\text{praštevilo}, n < 7\}$ in $C = \{n;\, n \in \mathbb{N}, n\,\text{liho}, n < 10\}$. Določite elemente množic $A \cap B$, $B \cup C$, $B - C$, $A \times B$ in $\mathcal{P}(B)$.

   Elementi množic: $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ in $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Iskane množice:

   $A \cap B = \{2\}$, $\quad B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $\quad B - C = \{2\}$,
   $A \times B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 5), (8, 2), (8, 3), (8, 5)\}$,
   $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 5\}\}$.

2. Dana je univerzalna množica $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ ter množice $A = \{2n;\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n;\, n \in \mathbb{N}, 5 \leq n \leq 15\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \{n;\, n \in \mathbb{N}, n\,\text{praštevilo}, n < 13\}$ in $E = \{a, b\}$. Določite elemente množic A^C, $A \cap B$, $C \cup D$, $D - C$, $C \times E$ in $\mathcal{P}(C)$. Ali je $D \subseteq B$?

   Elementi množic: A vsa soda števila, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ in $D = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Iskane množice:

   $A^C = \{2n - 1;\, n \in \mathbb{N}\}$, $\quad A \cap B = \{6, 8, 10, 12, 14\}$, $\quad C \cup D = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$,
   $D - C = \{5, 7, 11\}$, $\quad C \times E = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$,
   $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Množica D ni podmnožica množice B.

3. Dokažite DeMorganov zakon $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

   Vzamemo poljuben element x iz množice $(A \cup B)^C$. Ker velja

   $$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C,$$

   je element x tudi v množici $A^C \cap B^C$ in zato je $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$. Ker veljajo ekvivalence in ne samo implikacije, je tudi $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$, zato velja $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

4. Dokažite distributivnostni zakon $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

   Vzamemo poljuben element $x \in (A \cap B) \cup C$. Ker velja

   $$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \cap B \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A \cup C) \cap (B \cup C), \end{aligned}$$

   je $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Zaradi ekvivalenc na vseh korakih velja tudi obratna vsebovanost, zato sta množici enaki.

5. Poenostavite izraze $A - (A - B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap B^C)$ in $(A - C) \cup (B - C)$.

   a) $A - (A - B) = A \cap (A \cap B^C)^C = A \cap (A^C \cup B) = (A \cap A^C) \cup (A \cap B) = A \cap B$

   b) $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A \cap (B \cup B^C) = A$

   c) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup C^C) \cap (B \cup C^C) = (A \cup B) \cap C^C = (A \cup B) - C$

6. Določite potenčne množice za množice $\{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(\emptyset)$ in $\{1, \{1, 2\}, \{3\}\}$.

   a) $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

   b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

   c) $\mathcal{P}(\{1, \{1, 2\}, \{3\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{3\}\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{1, \{1, 2\}, \{3\}\}\}$

7. (♣) Dokažite, da velja enakost $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

Najprej dokažemo vsebovanost $\subseteq$:

$$\begin{aligned} x \in (A-B) \times C &\Rightarrow x = (u,v), u \in A - B, v \in C \\ &\Rightarrow u \in A, u \notin B, v \in C \\ &\Rightarrow x = (u,v) \in A \times C, x \notin B \times C \\ &\Rightarrow x \in (A \times C) - (B \times C) \end{aligned}$$

Nato dokažemo še vsebovanost $\supseteq$:

$$\begin{aligned} x \in (A \times C) - (B \times C) &\Rightarrow x \in A \times C, x \notin B \times C \\ &\Rightarrow x = (u,v), u \in A, v \in C, u \notin B \\ &\Rightarrow u \in A - B, v \in C \\ &\Rightarrow x = (u,v) \in (A-B) \times C \end{aligned}$$

8. Naj bodo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ univerzalna množica, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ preslikavi in $A = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; g(x) = 0\}$. Izrazite z množicama A in B množice rešitev enačb $f(x) \cdot g(x) = 0$, $f^2(x) + g^2(x) = 0$ in $g^2(x) \cdot f^2(x) + g^2(x) = 0$.

a) $C = \{x;\ f(x) \cdot g(x) = 0\} = \{x;\ f(x) = 0 \vee g(x) = 0\} = A \cup B$

b) $D = \{x;\ f^2(x) + g^2(x) = 0\} = \{x;\ f(x) = 0 \wedge g(x) = 0\} = A \cap B$

c) $E = \{x;\ g^2(x) \cdot f^2(x) + g^2(x) = 0\} = \{x;\ g^2(x)(f^2(x)+1) = 0\} = \{x;\ g(x) = 0\} = B$

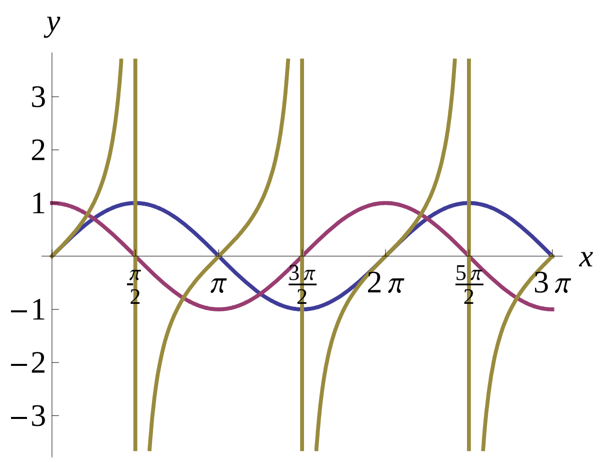
9. Naj bo $\mathcal{U} = [0, 3\pi)$ univerzalna množica. Dane množice $A = \{x; \sin x < 0\}$, $B = \{x; \cos x < 0\}$ in $C = \{x; \mathrm{tg} x > 0\}$ zapišite kot intervale oz. unijo intervalov ter določite $A \cap B$, $A^C \cap C$ in $B^C \cup C$.

Množice kot intervali

$$A = (\pi, 2\pi), \qquad B = (\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}) \cup (\tfrac{5\pi}{2}, 3\pi), \qquad C = (0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\pi, \tfrac{3\pi}{2}) \cup (2\pi, \tfrac{5\pi}{2}).$$

Sledi

$$A \cap B = (\pi, \tfrac{3\pi}{2}), \qquad A^C \cap C = (0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (2\pi, \tfrac{5\pi}{2}), \qquad B^C \cup C = [0, \tfrac{\pi}{2}] \cup (\pi, \tfrac{5\pi}{2}].$$



Slika 2: Grafi funkcij $\sin x$, $\cos x$ in $\mathrm{tg} x$ na intervalu $[0, 3\pi]$.

REALNA ŠTEVILA

Pravila za razstavljanje izrazov:

- Razlika kvadratov: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
- Vsota, razlika kubov: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
- Kvadrat vsote, razlike: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- Kub vsote, razlike: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Pravila za računanje s potencami:

$$\begin{aligned} x^n \cdot x^m &= x^{n+m}, & x^{-n} &= \frac{1}{x^n}, \\ \frac{x^n}{x^m} &= x^{n-m}, & (xy)^n &= x^n \cdot y^n, \\ (x^n)^m &= x^{nm}, & \left(\frac{x}{y}\right)^n &= \frac{x^n}{y^n}. \end{aligned}$$

Pravila za računanje s koreni:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} &= \sqrt[n]{x \cdot y}, & \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} &= \sqrt[n \cdot m]{x}, \\ \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} &= \sqrt[n]{\frac{x}{y}}, & \sqrt[nr]{x^{mr}} &= \sqrt[n]{x^m}. \end{aligned}$$

Kvadratna enačba:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Absolutna vrednost:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Pravila za računanje z logaritmi:

- Vsota logaritmov: $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$.
- Razlika logaritmov: $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$.
- Logaritem potence: $\log_a x^r = r\log_a x$.

Krivulje drugega reda:

- Krožnica: $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$.
- Elipsa: $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$.
- Hiperbola: $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = \pm 1$.
- Parabola: $y^2 = 2px$.

ENAČBE IN NEENAČBE

1. Rešite naslednje kvadratne enačbe.

a) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

To je kvadratna enačba, ki ima dve rešitvi

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4}.$$

Torej: $x_1 = -5$ in $x_2 = \frac{3}{2}$.

b) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = 0$

Enačba ima dve konjugirano kompleksni rešitvi: $x_{1,2} = 2 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}$.

2. Rešite naslednje enačbe s koreni.

a) $\sqrt{3x^2 - 7x + 3} = 1 - x$

Enačbo kvadriramo in dobimo kvadratno enačbo $2x^2 - 5x + 2 = 0$, ki ima dve rešitvi: $x_1 = \frac{1}{2}$ in $x_2 = 2$. Le prva je tudi rešitev prvotne enačbe.

b) $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{2x + 3} = \sqrt{7x - 20}$

Enačbo najprej dvakrat kvadriramo.

$$\begin{aligned} 5x + 1 - 2\sqrt{(5x+1)(2x+3)} + 2x + 3 &= 7x - 20 \\ \sqrt{10x^2 + 17x + 3} &= 12 \\ 10x^2 + 17x - 141 &= 0 \end{aligned}$$

Dobljena kvadratna enačba ima rešitvi $x_1 = 3$ in $x_2 = -\frac{47}{10}$, vendar je samo prva rešitev dobra tudi za prvotno enačbo, saj pri drugi dobimo koren iz negativnega števila.

c) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}$

Enačbo kvadriramo in uredimo.

$$\begin{aligned} x + \sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x - \sqrt{2x-1} &= 2 \\ \sqrt{(x-1)^2} &= 1 - x \\ |x - 1| &= 1 - x \\ x &\leq 1 \end{aligned}$$

Pogoj, da je koren definiran, je $2x - 1 \geq 0$ oz. $x \geq \frac{1}{2}$. Rešitev je torej zaprt interval $[\frac{1}{2}, 1]$.

3. Rešite enačbe z absolutno vrednostjo.

a) $x + |x + 1| = 3$

Ločimo dva primera.

$$\begin{aligned} x + 1 \geq 0 \text{ oz. } x \geq -1 \quad &\Rightarrow \quad x + x + 1 = 3, \text{ rešitev je } x = 1. \\ x + 1 < 0 \text{ oz. } x < -1 \quad &\Rightarrow \quad x - x - 1 = 3, \text{ ni rešitve.} \end{aligned}$$

Skupna rešitev je unija rešitev obeh primerov: $x \in \{1\}$.

b) $|x + 1| + |x - 1| = 2$

Ločimo tri primere.

$$\begin{aligned} x < -1 \quad &\Rightarrow \quad -x - 1 - x + 1 = 2, \text{ oz. } x = -1, \text{ ni rešitve.} \\ -1 \leq x < 1 \quad &\Rightarrow \quad x + 1 - x + 1 = 2, \text{ oz. } 2 = 2, \text{ rešitev je } [-1, 1). \\ x \geq 1 \quad &\Rightarrow \quad x + 1 + x - 1 = 2, \text{ oz. } x = 1, \text{ rešitev je } x = 1. \end{aligned}$$

Skupna rešitev: $x \in [-1, 1]$.

4. Poiščite množico rešitev naslednjih neenačb.

   a) $\{x;\ 2x < x+1 < 2x-1\}$

   To je sistem dveh neenačb. Prva neenačba $2x < x+1$ ima rešitev $x < 1$, druga neenačba $x+1 < 2x-1$ pa $x > 2$. Presek teh dveh rešitev je prazen, zato sistem nima rešitve, oz. rešitev je $\emptyset$.

   b) $\{x;\ x-5 < 2x-3 \leq x+2\}$

   Prva neenačba $x-5 < 2x-3$ ima rešitev $x > -2$, druga neenačba $2x-3 \leq x+2$ pa $x \leq 5$. Rešitev sistema je presek teh dveh rešitev, torej interval $x \in (-2, 5]$.

   c) $\{x;\ x(x-5) < -6\}$

   Po ureditvi dobimo kvadratno neenačbo $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) < 0$, ki ima za rešitev interval $x \in (2, 3)$. Pri reševanju kvadratnih neenačb si lahko pomagamo grafično tako, da skiciramo parabolo.

   d) $\{x;\ \frac{x+1}{x-1} > 0\}$

   Nenenačbo najprej množimo z $(x-1)^2$, kar je vedno pozitivno, zato se znak neenakosti ne spremeni. Seveda mora biti $x \neq 1$, da ne delimo z 0. Dobimo kvadratno neenačbo $(x-1)(x+1) > 0$, ki ima za rešitev unijo intervalov $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

5. Rešite naslednje neenačbe.

   a) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} > 3$

   Neenačbo dvakrat kvadriramo in uredimo. Upoštevamo pogoja $x \geq 0$ in $x+1 \geq 0$.

$$\begin{aligned} x + 2\sqrt{x(x+1)} + x + 1 &> 9 \\ \sqrt{x^2+x} &> 4 - x \\ x^2 + x &> 16 - 8x + x^2 \\ x &> \frac{16}{9} \end{aligned}$$

   b) $\sqrt{19-x} - \sqrt{x+1} > 2$

   Neenačbo dvakrat kvadriramo in uredimo.

$$\begin{aligned} 19 - x + 2\sqrt{(19-x)(x+1)} + x + 1 &> 4 \\ \sqrt{-x^2 + 18x + 19} &< 8 \\ x^2 - 18x + 45 &> 0 \\ (x-3)(x-15) &> 0 \end{aligned}$$

   Rešitev kvadratne neenačbe je unija intervalov $x \in (-\infty, 3) \cup (15, \infty)$. Z upoštevanjem pogojev $x \leq 19$, $x \geq -1$, in $19 - x > x + 1$, oz. $x < 9$, dobimo rešitev prvotne neenačbe: $x \in [-1, 3)$.

   c) $\frac{2x-3}{x-2} \leq 3$

   Neenačbo množimo z $(x-2)^2$ in uredimo.

$$\begin{aligned} (2x-3)(x-2) &\leq 3(x-2)^2 \\ 2x^2 - 7x + 6 &\leq 3x^2 - 12x + 12 \\ x^2 - 5x + 6 &\geq 0 \\ (x-2)(x-3) &\geq 0 \end{aligned}$$

   Rešitev je unija intervalov $x \in (-\infty, 2) \cup [3, \infty)$. Opazimo, da $x = 2$ ni rešitev, saj bi sicer delili z 0.

6. Rešite naslednje neenačbe z absolutno vrednostjo.

a) $|2x+3| \leq |4x-3|$

Ločimo tri primere.

$$\begin{aligned} x < -\tfrac{3}{2} \quad &\Rightarrow \quad -2x-3 \leq -4x+3, \text{ oz. } x \leq 3, \text{ rešitev je } (-\infty, -\tfrac{3}{2}). \\ -\tfrac{3}{2} \leq x < \tfrac{3}{4} \quad &\Rightarrow \quad 2x+3 \leq -4x+3, \text{ oz. } x \leq 0, \text{ rešitev je } [-\tfrac{3}{2}, 0]. \\ x \geq \tfrac{3}{4} \quad &\Rightarrow \quad 2x+3 \leq 4x-3, \text{ oz. } x \geq 3, \text{ rešitev je } [3, \infty). \end{aligned}$$

Skupna rešitev: $x \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$.

b) $x - |x| < |x+5| - 13$

Ločimo tri primere.

$$\begin{aligned} x < -5 \quad &\Rightarrow \quad x+x < -x-5-13, \text{ oz. } x < -6, \text{ rešitev je } (-\infty, -6). \\ -5 \leq x < 0 \quad &\Rightarrow \quad x+x < x+5-13, \text{ oz. } x < -8, \text{ ni rešitve.} \\ x \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad x-x < x+5-13, \text{ oz. } x > 8, \text{ rešitev je } (8, \infty). \end{aligned}$$

Skupna rešitev: $x \in (-\infty, -6) \cup (8, \infty)$.

c) $|x^2+3x-1| < 3$

Neenačbo zapišemo kot sistem dveh neenačb: $-3 < x^2+3x-1 < 3$. Prva neenačba

$$\begin{aligned} x^2+3x-1 &> -3 \\ x^2+3x+2 = (x+1)(x+2) &> 0 \end{aligned}$$

ima rešitev $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$. Druga neenačba

$$\begin{aligned} x^2+3x-1 &< 3 \\ x^2+3x-4 = (x-1)(x+4) &> 0 \end{aligned}$$

pa ima rešitev $x \in (-4, 1)$. Rešitev sistema dobimo kot presek gornjih rešitev in jo zapišemo kot unijo intervalov $x \in (-4, -2) \cup (-1, 1)$.

d) (♣) $\Big|2|x|-4\Big| < 2$

V tem primeru imamo dve gnezdeni absolutni vrednosti. Najprej ločimo dva primera za notranjo absolutno vrednost.

I $x \geq 0$: Neenačba se glasi $|2x-4| < 2$. Ločimo dva podprimera.

I.i $2x-4 \geq 0$ oz. $x \geq 2$

Tedaj je $2x-4 < 2$, torej $x < 3$ in dobimo rešitev $x \in [2, 3)$.

I.ii $2x-4 < 0$ oz. $x < 2$

Tedaj je $-2x+4 < 2$, torej $x > 1$ in dobimo rešitev $x \in (1, 2)$.

Rešitev tega primera je interval $(1, 3)$.

II $x < 0$: Neenačba se glasi $|-2x-4| < 2$. Ločimo dva podprimera.

II.i $-2x-4 \geq 0$ oz. $x \leq -2$

Tedaj je $-2x-4 < 2$, torej $x > -3$ in dobimo rešitev $x \in (-3, -2]$.

II.ii $-2x-4 < 0$ oz. $x > -2$

Tedaj je $2x+4 < 2$, torej $x < -1$ in dobimo rešitev $x \in (-2, -1)$.

Rešitev tega primera je interval $(-3, -1)$.

Skupna rešitev prvotne neenačbe je unija obeh rešitev: $x \in (-3, -1) \cup (1, 3)$.

7. Narišite podmnožice v ravnini.

a) $\{(x, y);\ 1 \leq x^2 + y^2 < 9\}$

$x^2 + y^2 = r^2$: enačba krožnice z radijem r
$x^2 + y^2 < r^2$: enačba notranjosti kroga z radijem r
$x^2 + y^2 > r^2$: enačba zunanjosti kroga z radijem r
Množica predstavlja kolobar med koncentričnima krožnicama z radijema 1 in 3 in središčem v izhodišču. Notranja krožnica je vključena, zunanja pa ne.

b) $\{(x, y);\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, y \geq \frac{1}{|x|}\}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: enačba elipse z glavnima polosema a in b.
Množica predstavlja unijo območij znotraj elipse s polosema 2 in 3 nad hiperbolo.

c) $\{(x, y);\ y \geq x^2 - 4, (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4\}$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$: enačba krožnice z radijem r in središčem v točki (a, b)
Množica predstavlja območje znotraj krožnice z radijem 2 in središčem $(1, -1)$ nad parabolo.

d) $\{(x, y);\ x - 2y + 4 \geq 0, 2x + 3y + 6 \geq 0, y + 2 \geq 0, y - 2 \leq 0, x - 5 \leq 0\}$

Množica predstavlja presek petih polravnin, ki so omejene s premicami $y = \frac{x}{2} + 2$, $y = -\frac{2x}{3} - 2$, $y = -2$, $y = 2$ in $x = 5$.

e) $\{(x, y);\ 2 + x - 2x^2 - x^3 \geq y, y \geq \frac{x}{2} + 1\}$

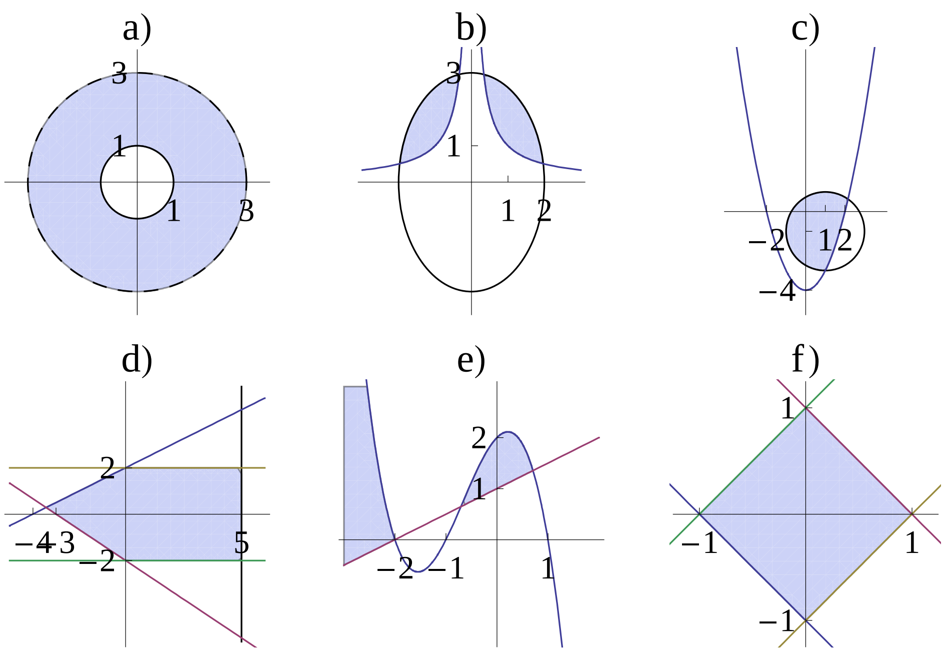
Množica predstavlja dve območji, ki ležita nad premico in pod grafom polinoma.

f) $\{(x, y);\ |x| + |y| \leq 1\}$

Neenačbo z absolutnimi vrednostmi rešimo na vsakem kvadrantu posebej.

I $x \geq 0$, $y \geq 0$: $x + y \leq 1$ oz. $y \leq -x + 1$
II $x < 0$, $y \geq 0$: $-x + y \leq 1$ oz. $y \leq x + 1$
III $x < 0$, $y < 0$: $-x - y \leq 1$ oz. $y \geq -x - 1$
IV $x \geq 0$, $y < 0$: $x - y \leq 1$ oz. $y \geq x - 1$

Množica predstavlja območje, ki je omejeno s štirimi premicami.



Slika 3: Slike območij.

Princip matematične indukcije:

Če trditev velja za naravno število 1, ter če ob predpostavki, da velja za naravno število n, velja tudi za naravno število $n+1$, potem trditev velja za vsa naravna števila.

8. Z matematično indukcijo dokažite naslednje enakosti.

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Baza indukcije za $n = 1$.
Leva stran ($1 \cdot 2 = 2$) je enaka desni ($\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$), zato enakost za $n = 1$ velja.
Indukcijski korak $n \to n+1$.
Za indukcijsko predpostavko vzemimo, da enakost velja za naravno število n

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Dokazujemo, da enakost velja tudi za naravno število $n+1$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Z uporabo indukcijske predpostavke na prvem koraku dobimo

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}. \end{aligned}$$

Enakost je s tem dokazana za vsa naravna števila.

b) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

$n = 1$: $1 = 2^1 - 1$ ✓.
$n \to n+1$: Indukcijska predpostavka: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Velja

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

c) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n = 1$: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ ✓.
$n \to n+1$: Indukcijska predpostavka: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Velja

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

9. Z indukcijo pokažite, da število deli dan izraz.

a) $9 \big| n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

Pri $n = 1$ je vrednost izraza enaka $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$, torej deljiva z 9. Indukcijsko predpostavko zapišemo v ekvivalentni obliki

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k.$$

Dokazujemo, da je tudi izraz za $n+1$ oblike $(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 = 9k'$. Velja

$$\begin{aligned}(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 &= (n+1)^3+(n+2)^3+n^3+9n^2+27n+27\\ &= 9k+9n^2+27n+27\\ &= 9(k+n^2+3n+3) = 9k'.\end{aligned}$$

Indukcijsko predpostavko smo uporabili na drugem koraku.

b) (♣) $133 \big| 11^{n+1}+12^{2n-1}$

Pri $n=1$ je vrednost izraza enaka $11^2+12^1=133$, torej deljiva z 133. Indukcijsko predpostavko zapišemo v ekvivalentni obliki

$$11^{n+1}+12^{2n-1}=133k.$$

Dokazujemo, da je tudi izraz za $n+1$ oblike $11^{n+2}+12^{2n+1}=133k'$. Velja

$$\begin{aligned}11^{n+2}+12^{2n+1} &= 11\cdot 11^{n+1}+12^2\cdot 12^{2n-1}\\ &= 11\underbrace{(11^{n+1}+12^{2n-1})}_{133k}+133\cdot 12^{2n-1}\\ &= 133(11k+12^{2n-1}) = 133k'.\end{aligned}$$

Indukcijsko predpostavko smo uporabili na drugem koraku.

c) (♣) $120 \big| n^5-5n^3+4n$, $n\geq 3$

Pri $n=3$ je vrednost izraza enaka $243-135+12=120$. Indukcijsko predpostavko zapišemo v ekvivalentni obliki

$$n^5-5n^3+4n=120k.$$

Dokazujemo, da je tudi izraz za $n+1$ oblike $(n+1)^5-5(n+1)^3+4(n+1)=120k'$. Velja

$$\begin{aligned}(n+1)^5-5(n+1)^3+4(n+1) &= \underbrace{n^5-5n^3+4n}_{120k}+5n^4+10n^3-5n^2-10n\\ &= 120k+5(n-1)n(n+1)(n+2)=120k'.\end{aligned}$$

Indukcijsko predpostavko smo uporabili na prvem koraku. Poleg tega smo v zadnjem koraku upoštevali dejstvo, da je produkt štirih zaporednih naravnih števil deljiv s 24.

10. Z matematično indukcijo dokažite neenakost $n<2^n$.

$n=1$: $1<2^1$ ✓.
$n\to n+1$: Indukcijska predpostavka $n<2^n$. Velja

$$n+1<2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}.$$

11. Pokažite, da ima končna množica z n elementi 2^n podmnožic.

Množica z enim elementom ima natanko $2^1=2$ podmnožici: prazno in samo sebe.
Privzemimo, da ima množica z n elementi 2^n podmnožic. Vse te podmnožice so tudi podmnožice množice z $n+1$ elementi. Poleg teh pa še vse te podmnožice z dodanim $(n+1)$-im elementom. Vseh je torej $2\cdot 2^n=2^{n+1}$. Trditev je s tem dokazana.

KOMPLEKSNA ŠTEVILA

$\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y; x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ imaginarna enota
$z = x + \mathrm{i}y$
$x = \Re z$ realna komponenta
$y = \Im z$ imaginarna komponenta
$w = u + \mathrm{i}v$

Računske operacije s kompleksnimi števili:

Seštevanje, odštevanje in množenje:

$z \pm w = (x \pm u) + \mathrm{i}(y \pm v)$,
$z \cdot w = (xu - yv) + \mathrm{i}(xv + yu)$.

Konjugirana vrednost:

$\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

Absolutna vrednost:
$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Obratna vrednost:
$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$.

Deljenje:
$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$.

Polarni zapis kompleksnega števila ($z = x + \mathrm{i}y$):

$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$

Eulerjeva formula: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$.

Zveze med obema zapisoma:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y &= r\sin\varphi, & \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Tabela:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Operacije s polarnim zapisom:

$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$,
$z \cdot w = |z| \cdot |w|(\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \psi))$,
$z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi)$,
$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$, DeMoivreova formula.

Enačbe oblike $z^n = w_0$:

$w_0 = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$,
$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

1. Poenostavite naslednje izraze in določite $\Re w$, $\Im w$, $\overline{w}$ in $|w|$.

a) $w = (1+2\mathrm{i})^3 = 1 + 6\mathrm{i} + 12\mathrm{i}^2 + 8\mathrm{i}^3 = 1 + 6\mathrm{i} - 12 - 8\mathrm{i} = -11 - 2\mathrm{i}$

Sledi: $\Re w = -11$, $\Im w = -2$, $\overline{w} = -11 + 2\mathrm{i}$ in $|w| = 5\sqrt{5}$.

b) $w = \frac{5}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{5(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})} = \frac{5(-3-4\mathrm{i})}{25} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$

Sledi: $\Re w = -\frac{3}{5}$, $\Im w = -\frac{4}{5}$, $\overline{w} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}$ in $|w| = 1$.

c) $w = \frac{2-3\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \frac{4+\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = \frac{(2-3\mathrm{i})(3+\mathrm{i})-(4+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = -\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i}$

Sledi: $\Re w = -\frac{2}{5}$, $\Im w = -\frac{3}{5}$, $\overline{w} = -\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$ in $|w| = \frac{\sqrt{13}}{5}$.

d) $w = \frac{(3+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})} = \frac{(2+4\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5} = 2\mathrm{i}$

Sledi: $\Re w = 0$, $\Im w = 2$, $\overline{w} = -2\mathrm{i}$ in $|w| = 2$.

e) $w = (-1+2\mathrm{i})^2 + \frac{11+10\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}} + \overline{2-3\mathrm{i}} = 1 - 4\mathrm{i} - 4 + \frac{44+40\mathrm{i}+11\mathrm{i}-10}{17} + 2 + 3\mathrm{i} = 1 + 2\mathrm{i}$

Sledi: $\Re w = 1$, $\Im w = 2$, $\overline{w} = 1 - 2\mathrm{i}$ in $|w| = \sqrt{5}$.

f) $w = \frac{z-\overline{z}}{2} = \frac{x+\mathrm{i}y-x+\mathrm{i}y}{2} = \mathrm{i}y$

Vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$. Sledi: $\Re w = 0$, $\Im w = y$, $\overline{w} = -\mathrm{i}y$ in $|w| = |y|$.

2. Poenostavite naslednje izraze.

a) $(1+2\mathrm{i})^2 + \frac{25}{3+4\mathrm{i}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) - \mathrm{i}^{207} = 1 + 4\mathrm{i} - 4 + \frac{25(3-4\mathrm{i})}{25} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}$

b) $(1+\mathrm{i})^2 + \frac{2}{1+\mathrm{i}} - \mathrm{i}^{15} = 1 + 2\mathrm{i} - 1 + \frac{2(1-\mathrm{i})}{2} + \mathrm{i} = 1 + 2\mathrm{i}$

3. Poenostavite naslednje izraze. Namig: $z = x + \mathrm{i}y$.

a) $w = z\overline{z}^2$

$$w = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)^2 = (x+\mathrm{i}y)(x^2-y^2-2xy\mathrm{i}) = (x^3+xy^2) + \mathrm{i}(-x^2y-y^3)$$

b) $w = \overline{z} - \mathrm{i}z^2$

$$w = (x-\mathrm{i}y) - \mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)^2 = x - \mathrm{i}y - \mathrm{i}x^2 + \mathrm{i}y^2 + 2xy = x(1+2y) + \mathrm{i}(y^2-y-x^2)$$

c) $w = \frac{\overline{z}\mathrm{i}}{z} + \frac{z}{\overline{z}}$

$$w = \frac{y+\mathrm{i}x}{x+\mathrm{i}y} + \frac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y} = \frac{(y+\mathrm{i}x)(x-\mathrm{i}y)+(x+\mathrm{i}y)^2}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)} = \frac{x^2+2xy-y^2+\mathrm{i}x^2+2\mathrm{i}xy-\mathrm{i}y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+2xy-y^2}{x^2+y^2}(1+\mathrm{i})$$

4. Zapišite naslednja kompleksna števila v polarni obliki.

a) $z = 1 + \mathrm{i}$

Ker je $x = 1$ in $y = 1$, sledi $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ in $\varphi = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$.
Polarna oblika: $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

b) $z = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

Ker je $x = -1$ in $y = -\sqrt{3}$, sledi $r = \sqrt{4} = 2$ in $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$. Kotu prištejemo π, ker število leži v tretjem kvadrantu. Pri tem upoštevamo, da je funkcija tg periodična s periodo π.
Polarna oblika: $z = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

c) $z = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$

Ker je $x = -\sqrt{2}$ in $y = \sqrt{2}$, sledi $r = 2$ in $\varphi = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.

Polarna oblika: $z = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

5. Izračunajte vrednost izraza z uporabo DeMoivreove formule.

a) $(-\sqrt{3}+3\mathrm{i})^7$

Število najprej zapišemo v polarni obliki $-\sqrt{3}+3\mathrm{i} = 2\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3})$ in nato uporabimo DeMoivreovo formulo

$$
\begin{aligned}
(-\sqrt{3}+3\mathrm{i})^7 &= (2\sqrt{3})^7\left(\cos\left(7\cdot\tfrac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(7\cdot\tfrac{2\pi}{3}\right)\right)\\
&= 128\cdot 27\sqrt{3}\left(\cos\tfrac{14\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\tfrac{14\pi}{3}\right)\\
&= 3456\sqrt{3}\left(\cos\tfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi}{3}\right)\\
&= 1728\sqrt{3}(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}).
\end{aligned}
$$

Na predzadnjem koraku upoštevamo periodičnost funkcij sin in cos (perioda 2π).

b) $(3-\sqrt{3}\mathrm{i})^7 = (2\sqrt{3})^7\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 1728\sqrt{3}(-\sqrt{3}+\mathrm{i})$

c) $(-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2})^{18} = 2^{18}\left(\cos\left(\frac{54\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{54\pi}{4}\right)\right) = 2^{18}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -262144\mathrm{i}$

d) $(2-2\mathrm{i}\sqrt{3})^{13} = 4^{13}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right) = 4^{13}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^{25}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

6. Rešite naslednje enačbe. Namig: polarna oblika.

a) $z^3 = 1$

Levo in desno stran enačbe zapišemo v polarni obliki

$$|z|^3(\cos 3\varphi+\mathrm{i}\sin 3\varphi) = 1(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0).$$

Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enak radij in enak kot. Zato rešimo enačbi $|z|^3 = 1$ in $\cos 3\varphi = \cos 0$. Prva ima rešitev $|z| = 1$, druga pa $3\varphi = 0+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, torej $\varphi_k = \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0,1,2$.
Tako dobimo tri kote $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$ in $\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$, ki nam dajo tri rešitve po formuli $z_k = |z|(\cos\varphi_k+\mathrm{i}\sin\varphi_k)$, $k = 0,1,2$:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 1(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0) = 1,\\
z_1 &= 1\left(\cos\tfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) = -\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2},\\
z_2 &= 1\left(\cos\tfrac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\tfrac{4\pi}{3}\right) = -\tfrac{1}{2}-\mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

Rešitve enačbe ležijo na krožnici z radijem 1 in so enakomerno razporejene.

b) $z^3 = \mathrm{i}$

Levo in desno stran enačbe zapišemo v polarni obliki

$$|z|^3(\cos 3\varphi+\mathrm{i}\sin 3\varphi) = 1\left(\cos\tfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{2}\right).$$

Enačimo radija in kota: $|z|^3 = 1$ in $\cos 3\varphi = \cos\frac{\pi}{2}$. Prva enačba ima rešitev $|z| = 1$, druga pa $3\varphi = \frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, torej $\varphi_k = \frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$, $k = 0,1,2$.
Tako dobimo tri kote: $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_1 = \frac{5\pi}{6}$ in $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$, ki nam dajo tri rešitve

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 1\left(\cos\tfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i},\\
z_1 &= 1\left(\cos\tfrac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\tfrac{5\pi}{6}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i},\\
z_2 &= 1\left(\cos\tfrac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\tfrac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

Rešitve enačbe ležijo na krožnici z radijem 1 in so enakomerno razporejene.

c) $z^4 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

Število $-\sqrt{3} + \mathrm{i}$ zapišemo v polarni obliki $-\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, rešitve pa izračunamo po formuli $z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{5\pi}{24} + \mathrm{i}\sin\tfrac{5\pi}{24}\right),\\
z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{17\pi}{24} + \mathrm{i}\sin\tfrac{17\pi}{24}\right),\\
z_2 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{29\pi}{24} + \mathrm{i}\sin\tfrac{29\pi}{24}\right),\\
z_3 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{41\pi}{24} + \mathrm{i}\sin\tfrac{41\pi}{24}\right).
\end{aligned}$$

d) $z^4 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$

Število $-2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ zapišemo v polarni obliki $-2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ in dobimo štiri rešitve

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\right),\\
z_1 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right),\\
z_2 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\tfrac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\right),\\
z_3 &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\tfrac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{5\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right).
\end{aligned}$$

7. Rešite naslednje enačbe. Namig: polarna oblika.

a) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z^4 + 32 = 0$

Enačbo najprej zapišemo v obliki

$$z^4 = -\frac{32}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}} = -8 + 8\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Levo in desno stran enačbe nato zapišemo v polarni obliki

$$|z|^4(\cos 4\varphi + \mathrm{i}\sin 4\varphi) = 16\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi}{3}\right).$$

Enačimo radija in kota: $|z|^4 = 16$ in $\cos 4\varphi = \cos\frac{2\pi}{3}$. Prva enačba ima rešitev $|z| = 2$, druga pa $4\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, torej $\varphi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Dobimo štiri rešitve

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i},\\
z_1 &= 2\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\\
z_2 &= 2\left(\cos\tfrac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - \mathrm{i},\\
z_3 &= 2\left(\cos\tfrac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\tfrac{5\pi}{3}\right) = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Rešitve enačbe ležijo na krožnici z radijem 2 in so enakomerno razporejene.

b) $z^3 - 4\mathrm{i} = (1 + \mathrm{i})^4$

Enačbo najprej zapišemo v obliki

$$z^3 = 4\mathrm{i} + (1 + \mathrm{i})^4 = -4 + 4\mathrm{i}.$$

Število $-4 + 4\mathrm{i}$ zapišemo v polarni obliki $-4 + 4\mathrm{i} = \sqrt{32}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ in dobimo tri rešitve

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[6]{32}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{32}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\\
z_1 &= \sqrt[6]{32}\left(\cos\tfrac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\tfrac{11\pi}{12}\right),\\
z_2 &= \sqrt[6]{32}\left(\cos\tfrac{19\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\tfrac{19\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

8. Rešite naslednje enačbe.

a) $|z| + z = 2 + \mathrm{i}$

Zapišemo $z = x + \mathrm{i}y$ in dobimo: $\sqrt{x^2+y^2} + x + \mathrm{i}y = 2 + \mathrm{i}$. Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enaki realni in imaginarni komponenti. Dobimo sistem dveh enačb $\sqrt{x^2+y^2} + x = 2$ in $y = 1$. Ko drugo vstavimo v prvo in kvadriramo, dobimo

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} &= 2 - x \\ x^2 + 1 &= 4 - 4x + x^2 \\ x &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Rešitev enačbe je število $z = \frac{3}{4} + \mathrm{i}$.

b) $2z^2 - 3\overline{z}^2 = 10\mathrm{i}$

Zapišemo $z = x + \mathrm{i}y$ in dobimo

$$\begin{aligned} 2(x+\mathrm{i}y)^2 - 3(x-\mathrm{i}y)^2 &= 10\mathrm{i} \\ -x^2 + y^2 + 10xy\mathrm{i} &= 10\mathrm{i} \end{aligned}$$

Enačimo realni in imaginarni komponenti: $y^2 - x^2 = 0$ in $10xy = 10$. Iz prve enačbe dobimo $y^2 = x^2$ oz. $y = \pm x$. To vstavimo v drugo enačbo in dobimo $x^2 = 1$, torej $x = \pm 1$ in zato $y = \pm 1$. Ker morata biti x in y hkrati pozitivna ali negativna, dobimo dve rešitvi enačbe $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ in $z_2 = -1 - \mathrm{i}$.

c) $(2z + 3\overline{z})(2\overline{z} + 3z) = -1$

Zapišemo $z = x + \mathrm{i}y$ in dobimo

$$\begin{aligned} (5x - \mathrm{i}y)(5x + \mathrm{i}y) &= -1 \\ 25x^2 + y^2 &= -1 \end{aligned}$$

Enačba nima rešitve.

d) $z^2 = 3 + 4\mathrm{i}$

Zapišemo $z = x + \mathrm{i}y$ in dobimo $x^2 - 2\mathrm{i}xy - y^2 = 3 + 4\mathrm{i}$. Dobimo sistem dveh realnih enačb $x^2 - y^2 = 3$ in $2xy = 4$, ki ima dve rešitvi: $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ in $x_2 = -2$, $y_2 = -1$. Prvotna enačba ima tako rešitvi $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ in $z_2 = -2 - \mathrm{i}$.

e) $\overline{z} - 1 = (z-1)^2$

Zapišemo $z = x + \mathrm{i}y$ in dobimo $x^2 - 3x - y^2 + 2 + \mathrm{i}(2xy - y) = 0$. Dobimo sistem dveh realnih enačb $x^2 - 3x - y^2 + 2 = 0$ in $2xy - y = 0$. Iz druge enačbe dobimo bodisi $y = 0$, bodisi $x = \frac{1}{2}$. Ko to vstavimo v prvo enačbo, dobimo v prvem primeru $x_1 = 1$ in $x_2 = 2$, v drugem primeru pa $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$. Prvotna enačba ima tako štiri rešitve: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ in $z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$.

9. Rešite naslednje sisteme enačb.

a) $|z - 2| = 3$, $|z + 1| = 3$

Vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$. Iz prve enačbe dobimo

$$\begin{aligned} |x + \mathrm{i}y - 2| &= 3 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$

Iz druge enačbe pa

$$\begin{aligned} |x + \mathrm{i}y + 1| &= 3 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$

Odštejemo in dobimo enačbo $6x = 3$, ki ima rešitev $x = \frac{1}{2}$. To rešitev vstavimo v enačbo $y^2 = 9 - (x+1)^2$ in dobimo $y^2 = \frac{27}{4}$, torej $y_{1,2} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Rešitvi sistema sta kompleksni števili $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ in $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

b) $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1$, $\frac{z}{\overline{z}} = \mathrm{i}$

Vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$. Rešimo najprej drugo enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y} &= \mathrm{i} \\ \frac{x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2}{x^2+y^2} &= \mathrm{i} \\ \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{2xy}{x^2+y^2} &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

Primerjava realnih komponent nam da $x^2 - y^2 = 0$, oz. $x^2 = y^2$, primerjava imaginarnih komponent pa $\frac{2xy}{x^2+y^2} = 1$, od koder sledi $\frac{2xy}{2x^2} = 1$, torej $y = x$. Iz prve enačbe dobimo

$$\begin{aligned} |z| &= |z+1| \\ x^2 + y^2 &= (x+1)^2 + y^2 \\ x^2 &= x^2 + 2x + 1 \\ x &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Sledi $y = -\frac{1}{2}$, zato je edina rešitev sistema $z = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$.

c) $|z - 3 - 3\mathrm{i}| = 5$, $z(4 - 3\mathrm{i}) - \overline{z}(4 + 3\mathrm{i}) = 6\mathrm{i}$

Vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$. Iz druge enačbe dobimo

$$\begin{aligned} (8y - 6x)\mathrm{i} &= 6\mathrm{i} \\ 4y - 3x &= 3 \\ x &= \tfrac{4}{3}y - 1 \end{aligned}$$

To vstavimo v prvo enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-3)^2 &= 25 \\ \left(\tfrac{4}{3}y - 4\right)^2 + (y-3)^2 &= 25 \\ \frac{25y^2}{9} - \frac{50y}{3} &= 0 \\ 25y(y-6) &= 0 \end{aligned}$$

Sledi $y_1 = 0$, $x_1 = -1$ in $y_1 = 6$, $x_1 = 7$. Rešitvi sistema sta $z_1 = -1$ in $z_2 = 7 + 6\mathrm{i}$.

d) (♣) $z\overline{z} + (2+\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i})\overline{z} + 4 = 0$, $(1-\mathrm{i})z + (1+\mathrm{i})\overline{z} + 4 = 0$

Vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$. Iz druge enačbe dobimo

$$\begin{aligned} (1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) + (1+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y) + 4 &= 0 \\ x + \mathrm{i}y - \mathrm{i}x + y + x - \mathrm{i}y + \mathrm{i}x + y + 4 &= 0 \\ 2x + 2y + 4 &= 0 \\ y &= -x - 2 \end{aligned}$$

Iz prve enačbe ob upoštevanju gornjega rezultata dobimo

$$\begin{aligned}
(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)+(2+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)+(2-\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y)+4 &= 0\\
x^2+y^2+2x+\mathrm{i}x+2\mathrm{i}x-y+2x-\mathrm{i}x-2\mathrm{i}y-y+4 &= 0\\
x^2+4x+y^2-2y+4 &= 0\\
x^2+4x+(-x-2)^2-2(-x-2)+4 &= 0\\
2x^2+10x+12 &= 0\\
(x+2)(x+3) &= 0
\end{aligned}$$

Sledi $x_1=-2$ in $x_2=-3$, ter $y_1=0$ in $y_2=1$. Rešitvi sistema sta $z_1=-2$ in $z_2=-3+\mathrm{i}$.

10. Rešite naslednje sisteme enačb.

a) $z_1\overline{z_2}=2\sqrt{2}$, $\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{i}\sqrt{2}$

Vzamemo $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ in $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$. Rešimo najprej drugo enačbo in dobimo

$$\begin{aligned}
x_1+\mathrm{i}y_1 &= \mathrm{i}\sqrt{2}(x_2-\mathrm{i}y_2)\\
x_1+\mathrm{i}y_1 &= y_2\sqrt{2}+x_2\mathrm{i}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Primerjava realnih komponent nam da $x_1=y_2\sqrt{2}$, primerjava imaginarnih komponent pa $y_1=x_2\sqrt{2}$. Iz prve enačbe pa dobimo

$$\begin{aligned}
(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2) &= 2\sqrt{2}\\
(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(y_1x_2-x_1y_2) &= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Ob upoštevanju rezultatov druge enačbe nam primerjava realnih komponent da $2x_2y_2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$, torej $x_2y_2=1$, primerjava imaginarnih komponent pa $x_2^2\sqrt{2}-y_2^2\sqrt{2}=0$, torej $x_2^2=y_2^2$. Edina možna rešitev je $y_2=x_2=\pm1$, zato ima sistem štiri rešitve

$$\begin{aligned}
z_2^1 &= 1+\mathrm{i}, & z_1^1 &= \sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2},\\
z_2^2 &= -1-\mathrm{i}, & z_1^2 &= -\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

b) $(2+\mathrm{i})z_1+(2-\mathrm{i})z_2=6$, $(3+2\mathrm{i})z_1+(3-2\mathrm{i})z_2=8$

To je sistem linearnih enačb, ki ga rešimo z Gaussovo eliminacijo tako, da prvo enačbo množimo s faktorjem $(3-2\mathrm{i})$, drugo pa s faktorjem $(2-\mathrm{i})$ in odštejemo, da odstranimo neznanko z_2. Dobimo

$$\begin{aligned}
(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})z_1-(3+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})z_1 &= 6(3-2\mathrm{i})-8(2-\mathrm{i})\\
-2\mathrm{i}z_1 &= 2-4\mathrm{i}\\
z_1 &= 2+\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Ta rezultat vstavimo v prvo ali drugo enačbo in izračunamo še

$$z_2=\frac{6-(2+\mathrm{i})^2}{2-\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}.$$

c) $(8+4\mathrm{i})z_1+(6-12\mathrm{i})z_2=10+20\mathrm{i}$, $(-3-3\mathrm{i})z_1+(-6+6\mathrm{i})z_2=6+12\mathrm{i}$

To je sistem linearnih enačb, ki ga rešimo z Gaussovo eliminacijo tako, da prvo enačbo množimo s faktorjem $(-6+6\mathrm{i})$, drugo pa s faktorjem $(6-12\mathrm{i})$ in odštejemo, da odstranimo neznanko z_2. Dobimo

$$\begin{aligned}
(8+4\mathrm{i})(-6+6\mathrm{i})z_1-(-3-3\mathrm{i})(6-12\mathrm{i})z_1 &= (10+20\mathrm{i})(-6+6\mathrm{i})-(6+12\mathrm{i})(6-12\mathrm{i})\\
(-18+6\mathrm{i})z_1 &= -360-60\mathrm{i}\\
z_1 &= 17+9\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Ta rezultat vstavimo v prvo ali drugo enačbo in izračunamo še

$$z_2 = \frac{10 + 20\mathrm{i} - (8 + 4\mathrm{i})(17 + 9\mathrm{i})}{6 - 12\mathrm{i}} = 5 - 10\mathrm{i}.$$

11. Narišite naslednje podmnožice kompleksne ravnine.

a) $\{z \in \mathbb{C}; \Re(\overline{z}^2) = 4\}$

Vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$ in dobimo

$$\begin{aligned} \Re((x - \mathrm{i}y)^2) &= 4 \\ \Re(x^2 - 2\mathrm{i}xy - y^2) &= 4 \\ x^2 - y^2 &= 4 \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

To je enačba hiperbole z glavnima polosema $a = 2$ in $b = 2$.

b) $\{z \in \mathbb{C}; 0 \le \Im(z) < 1\}$

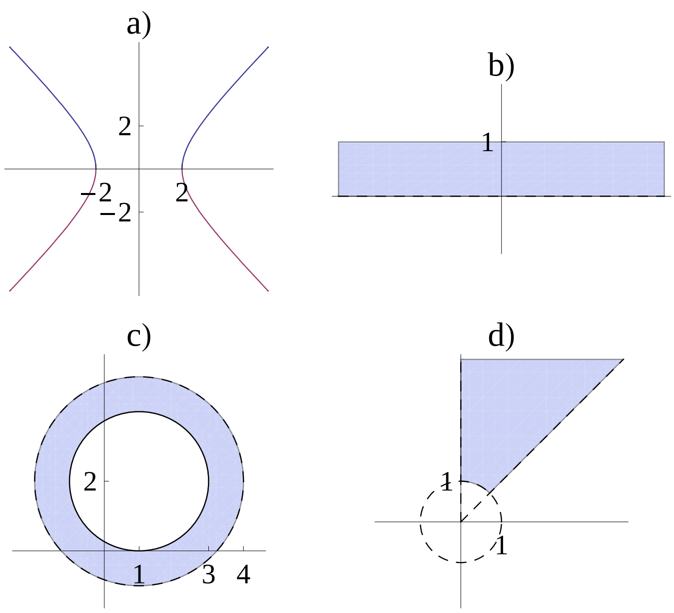
Če vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$, dobimo enačbo $0 \le y < 1$, kar predstavlja pas med premicama $y = 0$ in $y = 1$, kjer druge premice ni zraven, prva pa je.

c) $\{z \in \mathbb{C}; 2 \le |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\}$

Enačba $|z - z_0| = r$ predstavlja krožnico s središčem v točki z_0 in radijem r. Gornji sistem neenačb tako predstavlja kolobar s središčem v točki $1 + 2\mathrm{i}$, kjer je notranja krožnica z radijem $r = 2$ zraven, zunanja z radijem $r = 3$ pa ne.

d) $\{z \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}, |z| > 1\}$

Prvi neenačbi zadoščajo vsa kompleksna števila z argumentom strogo med $\frac{\pi}{4}$ in $\frac{\pi}{2}$, drugi pa vsa kompleksna števila, ki so za več kot 1 oddaljena od izhodišča.



Slika 4: Slike območij.

ZAPOREDJA

Zaporedje je predpis, ki vsakemu $n \in \mathbb{N}$ priredi $a_n \in \mathbb{R}$.

Monotonost zaporedij:

Zaporedje $\{a_n\}$ je naraščajoče, če je $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak n.

Zaporedje $\{a_n\}$ je strogo naraščajoče, če je $a_{n+1} > a_n$ za vsak n.

Zaporedje $\{a_n\}$ je padajoče, če je $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak n.

Zaporedje $\{a_n\}$ je strogo padajoče, če je $a_{n+1} < a_n$ za vsak n.

Kriterija za monotonost:

i) $a_{n+1} - a_n \geq 0 \Rightarrow$ zaporedje je naraščajoče

   $a_{n+1} - a_n \leq 0 \Rightarrow$ zaporedje je padajoče

ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow$ zaporedje je naraščajoče

   $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \Rightarrow$ zaporedje je padajoče

Omejenost zaporedij:

Zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$ je vsako število M, da velja $a_n \leq M$ za vsak n.

Spodnja meja zaporedja $\{a_n\}$ je vsako število m, da velja $a_n \geq m$ za vsak n.

Supremum ali natančna zgornja meja je najmanjša izmed vseh zgornjih mej.

Infimum ali natančna spodnja meja je največja izmed vseh spodnjih mej.

Supremum in infimum vedno obstajata.

Zaporedje $\{a_n\}$ je navzgor omejeno, če ima končno zgornjo mejo.

Zaporedje $\{a_n\}$ je navzdol omejeno, če ima končno spodnjo mejo.

Zaporedje $\{a_n\}$ je omejeno, če je navzgor in navzdol omejeno.

Maksimum je največji člen zaporedja $\{a_n\}$, minimum pa najmanjši člen zaporedja $\{a_n\}$.

Maksimum in minimum ne obstajata vedno. Če maksimum oz. minimum obstaja, potem je enak supremumu oz. infimumu.

Supremum in infimum nista nujno člena zaporedja, maksimum in minimum pa sta.

Stekališča in limite:

Število a je stekališče zaporedja $\{a_n\}$, če je v vsaki ε-okolici števila a neskončno členov tega zaporedja.

Število a je limita zaporedja $\{a_n\}$, če je v vsaki ε-okolici števila a neskončno členov tega zaporedja, izven te okolice pa le končno mnogo.

Limito označimo z $a = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Zaporedje, ki ima limito, se imenuje konvergentno, sicer pa divergentno.

Vsaka limita je stekališče, obratno pa ni nujno res. Stekališče je limita, ko je edino stekališče. Vsako stekališče je limita nekega podzaporedja.

Vsako omejeno zaporedje ima stekališče. Omejeno zaporedje z enim samim stekališčem je konvergentno.

Zaporedje je konvergentno, če je naraščajoče in navzgor omejeno.

Zaporedje je konvergentno, če je padajoče in navzdol omejeno.

1. Določite monotonost naslednjih zaporedij.

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$

Uporabimo drugi kriterij za monotonost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} < 1.$$

Zaporedje je strogo padajoče.

b) $a_n = n^2$

Uporabimo prvi kriterij za monotonost

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0.$$

Zaporedje je strogo naraščajoče.

c) $a_n = \frac{3^n}{n!}$

Uporabimo drugi kriterij za monotonost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3 \cdot 3^n \cdot n!}{(n+1) \cdot n! \cdot 3^n} = \frac{3}{n+1} \leq 1, \quad n \geq 2.$$

Zaporedje je padajoče za $n \geq 2$. Upoštevamo $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ in zvezo $(n+1)! = (n+1)n!$.

d) $a_n = \sin(n\pi)$

Zaporedje je konstantno enako 0.

2. Določite največji in najmanjši člen zaporedja (če obstajata) ter supremum in infimum.

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Najprej preverimo monotonost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1.$$

Ker je zaporedje strogo naraščajoče, je prvi člen minimalen

$$\min_n a_n = a_1 = \frac{1}{2} = \inf_n a_n.$$

Infimum je seveda enak minimumu. Maksimalen člen ne obstaja. Supremum pa je enak $\sup_n a_n = 1$, saj so vsi členi zaporedja strogo manjši od 1, vendar se 1 poljubno približajo.

b) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

Najprej preverimo monotonost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1.$$

Ker je zaporedje padajoče, je prvi člen maksimalen

$$\max_n a_n = a_1 = 2 = \sup_n a_n.$$

Supremum je seveda enak maksimumu. Minimalen člen ne obstaja. Infimum pa je enak $\inf_n a_n = 0$, saj eksponentna funkcija narašča počasneje kot fakulteta.

c) $a_n = (1 - \frac{1}{n})(-1)^n$

To je primer alternirajočega zaporedja. Prvih nekaj členov: $0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$.
Zaporedje razdelimo na dve podzaporedji: v prvem podzaporedju so členi z lihim indeksom, v drugem pa členi s sodim indeksom. Opazimo, da je prvo podzaporedje padajoče in pada od 0 proti -1 ($a_{2k-1} \to -1$), drugo podzaporedje pa je naraščajoče in narašča od $\frac{1}{2}$ proti 1 ($a_{2k} \to 1$). 1 in -1 nista člena zaporedja, zato maksimum in minimum ne obstajata, obstajata pa supremum in infimum

$$\sup_n a_n = 1, \qquad \inf_n a_n = -1.$$

3. Določite monotonost in omejenost naslednjih zaporedij.

a) $a_n = n\left(\frac{95}{100}\right)^n$

Najprej preverimo monotonost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{95(n+1)}{100n} \leq 1,$$

ko je $n \geq 19$. Od tod sledi, da je zaporedje najprej naraščajoče, od dvajsetega člena dalje pa je padajoče. Sledi

$$\max_n a_n = a_{19} = a_{20} = \sup_n a_n.$$

Minimalen člen ne obstaja. Infimum pa je enak $\inf_n a_n = 0$.

b) $a_n = n^2 - 9n - 1$

Najprej preverimo monotonost

$$a_{n+1} - a_n = 2n - 8 \leq 0,$$

ko je $n \leq 4$. Od tod sledi, da je zaporedje najprej padajoče, od petega člena dalje pa je naraščajoče. Sledi

$$\min_n a_n = a_4 = a_5 = -21 = \inf_n a_n.$$

Maksimalen člen ne obstaja. Supremum pa je enak $\sup_n a_n = \infty$.

4. Zapišite splošni člen zaporedja.

a) $2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

To je zaporedje naravnih števil, ki se začne z 2, zato je splošni člen $a_n = n + 1$.

b) $1, -4, 9, -16, 25, \ldots$

To je alternirajoče zaporedje kvadratov naravnih števil, zato je splošni člen $a_n = (-1)^{n+1}n^2$.
Potenca $n + 1$ je zato, ker se alternirajoče zaporedje začne s pozitivnim členom.

5. Določite stekališča naslednjih zaporedij. Ali je zaporedje konvergentno?

a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

Zaporedje ima eno samo stekališče, saj se vsi členi približujejo k 1, torej je konvergentno.

b) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Prvih nekaj členov zaporedja: $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ldots$.
Členi se ponavljajo, ker je sin periodična funkcija. Zaporedje ima tri stekališča 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, zato ni konvergentno (je divergentno).

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots$

Zaporedje razdelimo na dve podzaporedji: členi z lihimi indeksi se približujejo 0, členi s sodimi indeksi pa k 1, stekališči sta dve: 0 in 1, zato zaporedje ni konvergentno.

6. Izračunajte naslednje limite.

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2+9n-6}{2n^3+3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8}{n}+\frac{9}{n^2}-\frac{6}{n^3}}{2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = 0$$

Limite takega tipa rešujemo tako, da delimo števec in imenovalec z najvišjo potenco, v tem primeru z n^3. Velja: $\frac{1}{n^r} \to 0$, ko gre $n \to \infty$ za vsak $r \geq 1$.

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2+2}{3n^2+11n-2} = \frac{7}{3}$$

Če sta stopnji polinomov v števcu in imenovalcu enaki, je limita enaka kvocientu vodilnih koeficientov.

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-7n+1}{n^3+1} = 0$$

d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Pri določanju najvišje potence je potrebno upoštevati tudi korene.

e)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

Limite takega tipa rešujemo tako, da izraz v števcu in imenovalcu pomnožimo s podobnim izrazom, le da je namesto minusa v izrazu plus.

f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n})}{n^2+1-n} = 1$$

g)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+3}-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+n}{3n} = \frac{2}{3}$$

h)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}(n+1-n)} = 2$$

i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}} = 3$$

Velja: $a^n \to 0$, ko gre $n \to \infty$ za $a < 1$. V tem primeru je $a = \frac{2}{3} < 1$.

7. Izračunajte naslednji limiti.

a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Upoštevamo enakost $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, ki jo dokažemo z indukcijo.

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n-2n-3}{2^n}=3$$

Upoštevamo enakost $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}=\frac{3\cdot 2^n-2n-3}{2^n}$, ki jo dokažemo z indukcijo.

8. Z uporabo enakosti $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ izračunajte naslednje limite.

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+3}{2}}\right)^{n\cdot\frac{n+3}{2}\cdot\frac{2}{n+3}}=\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}}=\mathrm{e}^2$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{2}}\right)^{3n\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\frac{2}{n+2}}=\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n+2}}=\mathrm{e}^{-6}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+6}{2n^2+5}\right)^{6n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+5}\right)^{\frac{(6n^2+3)(2n^2+5)}{2n^2+5}}=\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+3}{2n^2+5}}=\mathrm{e}^3$$

d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)^{n^2+7}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+3}{2}}\right)^{(n^2+7)\cdot\frac{n^2+3}{2}\cdot\frac{2}{n^2+3}}=\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+14}{n^2+3}}=\mathrm{e}^2$$

e)

$$\lim_{n\to\infty}(n+3)(\ln(n+1)-\ln n)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+3}=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}=\ln\mathrm{e}=1$$

Najprej upoštevamo lastnosti logaritemske funkcije: $\ln a+\ln b=\ln(ab)$ in $r\ln a=\ln a^r$. Nato upoštevamo še, da lahko zamenjamo vrstni red limitiranja in logaritmiranja, saj je ln zvezna funkcija.

9. Ugotovite od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja a_n razlikujejo od limite za manj kot ε.

a) $a_n=\frac{2n-2}{2n+2}$, $\varepsilon=\frac{1}{100}$

Rešiti je potrebno neenačbo $|a_n-a|<\varepsilon$, kjer je $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n-2}{2n+2}-1\right| &< \frac{1}{100}\\ \frac{4}{2n+2} &< \frac{1}{100}\\ n &> 199\end{aligned}$$

Od dvestotega člena dalje so vsi členi zaporedja v dani okolici.

b) $a_n=\frac{n^2+n}{n^2+1}$, $\varepsilon=\frac{1}{10}$

Limita je enaka $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2+n}{n^2+1}-1\right| &< \frac{1}{10}\\ \frac{n-1}{n^2+1} &< \frac{1}{10}\\ n^2-10n+11 &> 0\end{aligned}$$

Enačba $n^2 - 10n + 11 = 0$ ima dve rešitvi $n_{1,2} = 5 \pm \sqrt{14}$, kjer je $n_1 = 5 + \sqrt{14} \doteq 8.74$ in $n_2 = 5 - \sqrt{14} \doteq 1.25$. Gornja neenakost velja za vse $n > n_1$ in $n < n_2$, torej so od devetega člena dalje vsi členi zaporedja v tej okolici. Zanimajo nas le naravna števila n.

c) $a_n = \frac{5^n-1}{5^n}$, $\varepsilon = 25^{-25}$

Limita je enaka $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

$$\begin{aligned} \left|\frac{5^n-1}{5^n} - 1\right| &< 25^{-25} \\ \frac{1}{5^n} &< \frac{1}{5^{50}} \\ n &> 50 \end{aligned}$$

Od enainpetdesetega člena dalje so vsi členi zaporedja v dani okolici.

d) $a_n = \frac{3n^2+n-2}{n^2+2n+1}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$

Limita je enaka $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

$$\begin{aligned} \left|\frac{3n^2+n-2}{n^2+2n+1} - 3\right| &< \frac{1}{10} \\ \frac{5(n+1)}{(n+1)^2} &< \frac{1}{10} \\ n &> 49 \end{aligned}$$

Od petdesetega člena dalje so vsi členi zaporedja v dani okolici.

10. Dokažite, da je zaporedje konvergentno, in izračunajte limito.

a) $a_n = \frac{5^n}{n!}$

Ker je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}n!}{5^n(n+1)!} = \frac{5}{n+1} < 1$ za $n > 4$, je zaporedje od četrtega člena dalje padajoče. Ker so vsi členi očitno pozitivni, je zaporedje navzdol omejeno z 0 in zato konvergentno.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$$

b) $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

Ker je $a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - 1 + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ za vsak n, je zaporedje naraščajoče. Ker so vsi členi očitno manjši od 1, je zaporedje navzgor omejeno z 1 in zato konvergentno.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

11. Dokažite, da je rekurzivno podano zaporedje konvergentno, in izračunajte limito.

a) $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{3} - 2$

Prvih nekaj členov zaporedja: $0, -2, -\frac{8}{3}, \ldots$ pada, zato je za dokaz konvergence dovolj dokazati, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno.

i Pokažimo, da je zaporedje navzdol omejeno. Uporabimo indukcijo za dokaz $a_n > -3$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ je $a_1 = 0 > -3$, torej baza indukcije drži. Za dokaz indukcijskega koraka vzamemo za indukcijsko predpostavko, da je $a_n > -3$ in dokazujemo, da je tudi $a_{n+1} > -3$. Torej

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3} - 2 > \frac{-3}{3} - 2 = -3.$$

ii Pokažimo, da je zaporedje padajoče

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{3} - 2 - a_n = -\frac{2a_n}{3} - 2 < -\frac{2\cdot(-3)}{3} - 2 = 0.$$

Ker je zaporedje padajoče in navzdol omejeno, je konvergentno. Izračunajmo še limito, kjer označimo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{3} - 2 \\ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{3} - 2\right) \\ a &= \frac{a}{3} - 2 \\ a &= -3 \end{aligned}$$

Velja: $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$, ker se zaporedji a_{n+1} in a_n razlikujeta samo v prvem členu, kar pa ne vpliva na limito.

b) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$

Prvih nekaj členov zaporedja: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots$ narašča, zato je za dokaz konvergence dovolj dokazati, da je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno.

i Pokažimo, da je zaporedje navzgor omejeno. Uporabimo indukcijo za dokaz $a_n < 2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ je $a_1 = 1 < 2$, torej baza indukcije drži. Za dokaz indukcijskega koraka vzamemo za indukcijsko predpostavko, da je $a_n < 2$ in dokazujemo, da je tudi $a_{n+1} < 2$. Torej

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 < \frac{2}{2} + 1 = 2.$$

ii Pokažimo, da je zaporedje naraščajoče

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + 1 - a_n = -\frac{a_n}{2} + 1 > -\frac{2}{2} + 1 = 0.$$

Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, je konvergentno. Izračunajmo še limito.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + 1 \\ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2} + 1\right) \\ a &= \frac{a}{2} + 1 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

c) $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{a_n}{4} + 1$

Prvih nekaj členov zaporedja: $3, \frac{7}{4}, \frac{23}{16}, \ldots$ pada, zato je dovolj dokazati, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno.

i Z indukcijo pokažemo, da je zaporedje navzdol omejeno z $a_n > \frac{4}{3}$. Za $n = 1$ je $a_1 = 3 > \frac{4}{3}$ in trditev velja. Indukcijski korak

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4} + 1 > \frac{4}{3}.$$

ii Pokažimo, da je zaporedje padajoče

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{4} + 1 - a_n = -\frac{3a_n}{4} + 1 < 0.$$

Ker je zaporedje padajoče in navzdol omejeno, je konvergentno. Izračunajmo še limito.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{4} + 1 \\ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{4} + 1\right) \\ a &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

12. (♣) Dokažite, da je zaporedje $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n^2 + 1$ konvergentno, in izračunajte limito.

Prvih nekaj členov zaporedja: $a_1 = 1, a_2 = \frac{6}{5}, a_3 = \frac{161}{125}, \ldots$. Očitno velja: $a_n > 0$.

i Pokažimo, da je zaporedje navzgor omejeno.
Z indukcijo pokažemo, da je $a_n < 2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ je $a_1 = 1 < 2$, torej baza indukcije drži. Za dokaz indukcijskega koraka vzamemo za indukcijsko predpostavko, da je $a_n < 2$, in dokazujemo, da je tudi $a_{n+1} < 2$. Torej

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{5}a_n^2 + 1 < \tfrac{1}{5}2^2 + 1 = \tfrac{9}{5} < 2.$$

ii Pokažimo, da je zaporedje naraščajoče.
Tudi tu si pomagamo z indukcijo, da dokažemo $a_{n+1} - a_n > 0$. Za $n = 1$ je $a_2 - a_1 = \frac{1}{5} > 0$. Za indukcijski korak vzamemo indukcijsko predpostavko $a_n - a_{n-1} > 0$ in dokazujemo $a_{n+1} - a_n > 0$. Torej

$$a_{n+1} - a_n = \tfrac{1}{5}a_n^2 + 1 - \tfrac{1}{5}a_{n-1}^2 - 1 = \tfrac{1}{5}(a_n^2 - a_{n-1}^2) = \tfrac{1}{5}(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1})$$

Ker je $a_n + a_{n-1} > 0$, je $a_{n+1} - a_n > 0$ natanko tedaj, ko je $a_n - a_{n-1} > 0$. Sledi, da je zaporedje naraščajoče.

Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, je konvergentno. Za izračun limite označimo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \tfrac{1}{5}a_n^2 + 1 \\ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{5}a_n^2 + 1\right) \\ a &= \tfrac{1}{5}a^2 + 1 \end{aligned}$$

Dobimo kvadratno enačbo $a^2 - 5a + 5 = 0$, ki ima dve rešitvi: $a_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ in $a_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Prva rešitev ni limita, ker je večja od 2, zato je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

13. Izračunajte prvi člen in razliko aritmetičnega zaporedja, če je $a_{14} = 14$ in $a_{40} = 16$.

Splošni člen aritmetičnega zaporedja je $a_n = a_1 + (n-1)d$. Od tod sledi sistem enačb $a_{14} = a_1 + 13d = 14$ in $a_{40} = a_1 + 39d = 16$, ki ima rešitev $a_1 = 13$ in $d = \frac{1}{13}$.

14. Določite parameter x tako, da bo zaporedje $a_1 = x - 15$, $a_2 = x - 9$, $a_3 = x$ geometrijsko.

Splošni člen geometrijskega zaporedja je $a_n = a_1 q^{n-1}$. Da bo zaporedje geometrijsko mora biti $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_3}$. Sledi

$$\begin{aligned} \frac{x-9}{x-15} &= \frac{x}{x-9} \\ (x-9)^2 &= x(x-15) \\ x &= 27 \end{aligned}$$

Dobimo $a_1 = 12$, $a_2 = 18$, $a_3 = 27$ in $q = \frac{3}{2}$.

ŠTEVILSKE VRSTE

Številsko vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ seštejemo tako, da najprej izračunamo N-to delno vsoto $s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$. To nam da zaporedje delnih vsot, ko gre $N \to \infty$. Če to zaporedje konvergira, limito označimo z $s = \lim\limits_{N\to\infty} s_N$. Vsota vrste je tedaj enaka limiti delnih vsot $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Pravimo, da vrsta konvergira, če konvergira zaporedje delnih vsot, sicer vrsta divergira.

Geometrijska vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Kriteriji za konvergenco številskih vrst s pozitivnimi členi.

I Kvocientni kriterij. Dana je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Izračunamo $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

- **i** Če je $q < 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- **ii** Če je $q > 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- **iii** Če je $q = 1$, kriterij odpove.

II Korenski kriterij. Dana je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Izračunamo $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

- **i** Če je $q < 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- **ii** Če je $q > 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- **iii** Če je $q = 1$, kriterij odpove.

III Primerjalni kriterij. Naj bo $0 \leq a_n \leq b_n$ za vsak $n \geq n_0$.

- **i** Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- **ii** Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, divergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Kriterij za konvergenco alternirajočih vrst.

Alternirajoča vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira, če zaporedje a_n od nekje dalje monotono pada proti 0.

1. Seštejte naslednje vrste tako, da izračunate limito delnih vsot.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   Splošni člen vrste je $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, ki ga zapišemo v obliki parcialnih ulomkov

   $$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}.$$

   Primerjamo števca in dobimo sistem dveh enačb za dve neznanki $A + B = 0$, $A = 1$, od koder sledi, da je $B = -1$. Torej je $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. N-ta delna vsota vrste je

   $$s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{N} - \tfrac{1}{N+1}\right) = 1 - \tfrac{1}{N+1}.$$

   Opazimo, da se vsi vmesni členi odštejejo. Vsota vrste je enaka limiti zaporedja delnih vsot

   $$s = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

   Torej je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

Splošni člen vrste je $a_n = \frac{1}{4n^2-1}$, ki ga zapišemo v obliki parcialnih ulomkov

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{2(A+B)n+(A-B)}{4n^2-1}.$$

Primerjava števcev da sistem $A+B=0$, $A-B=1$, ki ima rešitev $A=\frac{1}{2}$ in $B=-\frac{1}{2}$. Torej je $a_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$. Sedaj izračunamo N-to delno vsoto vrste

$$s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{4N-2} - \tfrac{1}{4N+2}\right) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4N+2}.$$

Vsota vrste je tedaj enaka limiti zaporedja delnih vsot

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4N+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Torej je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

Splošni člen vrste je $a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, ki ga zapišemo v obliki parcialnih ulomkov

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1} = \frac{3(A+B)n+(A-2B)}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Primerjava števcev da sistem $A+B=0$, $A-2B=1$, ki ima rešitev $A=\frac{1}{3}$ in $B=-\frac{1}{3}$. Torej je $a_n = \frac{1}{3(3n-2)} - \frac{1}{3(3n+1)}$. Sedaj izračunamo N-to delno vsoto vrste

$$s_N = \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{12}\right) + \left(\tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{21}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{3(3N-2)} - \tfrac{1}{3(3N+1)}\right) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3(3N+1)}.$$

Vsota vrste je tedaj enaka limiti zaporedja delnih vsot

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3(3N+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

Torej je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}$.

2. Izračunajte vsote naslednjih geometrijskih vrst.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{37}{100^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{37}{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} = \frac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{37}{99}$

Opazimo: $a = \frac{37}{100}$, $q = \frac{1}{100}$, $|q| < 1$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = 4$

Opazimo: $a = 3$, $q = \frac{1}{4}$, $|q| < 1$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{1-\frac{2}{3}} = 12$

Opazimo: $a = a_1 = 4$, $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3}$, $|q| < 1$.

3. Z uporabo geometrijske vrste zapišite decimalno število $0,232323\ldots$ v obliki ulomka.

$$\begin{aligned} 0,232323\ldots &= 23\cdot\frac{1}{100}+23\cdot\frac{1}{10000}+23\cdot\frac{1}{1000000}+\cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 23\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}=\frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{23}{99}\end{aligned}$$

Opazimo: $a=\frac{23}{100}$, $q=\frac{1}{100}$, $|q|<1$.

4. S pomočjo kvocientnega kriterija določite konvergenco naslednjih vrst.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

Splošni člen: $a_n=\frac{1}{n!}$.

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Vrsta je konvergentna.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(2n)!}$

Splošni člen: $a_n=\frac{(3n)!}{(2n)!}$.

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)!(2n)!}{(3n)!(2n+2)!} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!(2n)!}{(3n)!(2n+2)(2n+1)(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{27n^3+54n^2+33n+6}{4n^2+6n+2}=\infty>1\end{aligned}$$

Vrsta je divergentna.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}$

Ker je $q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{2n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1$, kvocientni kriterij v tem primeru odpove.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\mathrm{e}^n}$

Ker je $q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\mathrm{e}}=\infty>1$, je vrsta divergentna.

5. S pomočjo korenskega kriterija določite konvergenco naslednjih vrst.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

Splošni člen: $a_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$.

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}=\mathrm{e}^{-2}<1$$

Vrsta je konvergentna. Upoštevamo, da je $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{n\cdot 5^n}$

Splošni člen: $a_n=\frac{3^{2n+1}}{n\cdot 5^n}$.

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n\cdot 5^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3\cdot 9^n}{n\cdot 5^n}}=\frac{9}{5}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}}=\frac{9}{5}>1$$

Vrsta je divergentna. Velja: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ in $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$, $c=$ konst.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n+1}$

Ker je $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3n}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} = 1$, korenski kriterij v tem primeru odpove.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{3n+1}$

Ker je $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{3n+1}\right)^{\frac{3n+1}{n}} = \dfrac{1}{27} < 1$, je vrsta konvergentna.

6. (♣) S pomočjo minorante ali majorante določite konvergenco naslednjih vrst.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$

Ker je $\log n < n$, je $\frac{1}{n} < \frac{1}{\log n}$ in zato $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n} < \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\log n}$. Harmonična vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ je divergentna, zato je po primerjalnem kriteriju divergentna tudi dana vrsta.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ je konvergentna, če je $\alpha > 1$, in divergentna, če je $\alpha \le 1$. Ker je $n(n^2+1) > n^3$, je $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$ in zato $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Ker je $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ konvergentna, zato je po primerjalnem kriteriju konvergentna tudi dana vrsta.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}}$

Ker je $n^2+n+1 \le 3n^2$, sledi $\frac{2n}{n^2+n+1} \ge \frac{2}{3n}$ in zato $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^2+n+1} \ge \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3n}$. Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3n}$ je divergentna, zato je po primerjalnem kriteriju divergentna tudi dana vrsta.

7. Določite konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3}{(n^3+1)^2}$.

Za vrste oblike $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{p(n)}{q(n)}$, kjer sta p in q polinoma, velja, da vrsta konvergira, če je $\mathrm{st}(q) - \mathrm{st}(p) \ge 2$, in divergira, če je $\mathrm{st}(q) - \mathrm{st}(p) < 2$. V danem primeru je razlika stopenj $\mathrm{st}(q) - \mathrm{st}(p) = 6 - 3 = 3 > 2$, zato vrsta konvergira.

8. Določite konvergenco naslednjih alternirajočih vrst.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

Preveriti moramo, da je zaporedje $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ padajoče ter da ima limito 0.

Ker je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n}{n+2} < 1$, je zaporedje padajoče z limito

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0,$$

zato vrsta konvergira.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$

Ker je $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} < 1$, je zaporedje padajoče z limito $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, zato vrsta konvergira.

FUNKCIJE

Funkcija je predpis $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

D_f: definicijsko območje, $Z_f = \{f(x); x \in \mathcal{D}\}$: zaloga vrednosti funkcije f.

Funkcija f je soda, če je $f(-x) = f(x)$.
Funkcija f je liha, če je $f(-x) = -f(x)$.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{Z}$ je injektivna, če za $x, y \in \mathcal{D}$, $x \neq y$, velja $f(x) \neq f(y)$ (oz. $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$).
Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{Z}$ je surjektivna, če za vsak $y \in \mathcal{Z}$ obstaja $x \in \mathcal{D}$, da velja $y = f(x)$ (oz. $Z_f = \mathcal{Z}$).
Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{Z}$ je bijektivna, če je injektivna in surjektivna.

Kompozitum funkcij: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Inverz funkcije: $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Limite funkcij:

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} P(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$, $P(x)$ polinom

1. Določite definicijsko območje naslednjih funkcij.

   a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x}$

   Ker ne smemo deliti z 0, mora biti $x \neq 0$. Vemo, da je korenska funkcija definirana samo za nenegativna števila, torej mora veljati $4 - x^2 \geq 0$. Od tu sledi $x^2 \leq 4$, torej $|x| \leq 2$ oz. $-2 \leq x \leq 2$. Definicijsko območje: $D_f = [-2, 0) \cup (0, 2]$.

   b) $f(x) = x + \ln \frac{x-1}{x+1}$

   Ker ne smemo deliti z 0, mora biti $x \neq -1$. Vemo, da je logaritemska funkcija definirana samo za pozitivna števila, torej mora veljati $\frac{x-1}{x+1} > 0$. Množimo z $(x + 1)^2$ in dobimo kvadratno neenačbo $(x - 1)(x + 1) > 0$. Od tod sledi $x^2 > 1$, torej $|x| > 1$ oz. $x < -1$ ali $x > 1$. Definicijsko območje: $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

   c) $f(x) = \ln (|x + 2| - |x - 3| + 3)$

   Iščemo rešitev neenačbe $|x + 2| - |x - 3| + 3 > 0$. Da odpravimo absolutno vrednost, reševanje neenačbe razdelimo na tri podprimere.

   i) Ko je $x < -2$, neenačba nima rešitev.

   ii) Ko je $-2 \leq x < 3$, se neenačba prevede na $x > -1$, od koder dobimo za rešitev interval $(-1, 3)$.

   iii) Ko je $x \geq 3$, je neenačba vedno izpolnjena, od koder dobimo za rešitev interval $[3, \infty)$.

   Definicijsko območje: $D_f = (-1, \infty)$.

   d) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

   Ker ne smemo deliti z 0, mora biti $x \neq -1$. Vemo, da je funkcija arkus sinus definirana za števila med vključno -1 in 1, torej mora veljati $-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1$. To je sistem dveh neenačb

$$\begin{aligned} -1 &\leq \tfrac{2x}{1+x}\Big| \cdot (1+x)^2 \\ -1 - 2x - x^2 &\leq 2x + 2x^2 \\ 3x^2 + 4x + 1 &\geq 0 \\ (x+1)(3x+1) &\geq 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tfrac{2x}{1+x} &\leq 1\Big| \cdot (1+x)^2 \\ 2x + 2x^2 &\leq 1 + 2x + x^2 \\ x^2 - 1 &\leq 0 \\ (x+1)(x-1) &\leq 0. \end{aligned}$$

   Rešitev prve neenačbe je $(-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{3}, \infty)$, rešitev druge pa $[-1, 1]$, definicijsko območje je presek obeh rešitev: $D_f = [-\frac{1}{3}, 1]$.

2. Določite definicijsko območje in zalogo vrednosti naslednjih funkcij.

   a) $f(x) = 1 - x^2$

   Ker je to kvadratna funkcija, torej poseben primer polinomov, je definirana povsod: $D_f = \mathbb{R}$. Ničli ima v točkah $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$, največjo vrednost pa v točki $x = 0$, kjer je enaka $f(0) = 1$. Zato je zaloga vrednosti $Z_f = (-\infty, 1]$.

   b) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

   Ker ne smemo deliti z 0, mora biti $x \neq 0$. Zato je $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Graf funkcije je simetričen glede na ordinatno os, zato se lahko brez škode za splošnost omejimo na pozitivna števila. Oglejmo si limitne vrednosti funkcije
   $x \to 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \to \infty \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \to 0$,
   $x \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x^2} \to 0 \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \to 1$.
   Torej je $Z_f = (0, 1)$, ker je funkcija f strogo naraščajoča na $(0, \infty)$.

3. Preverite sodost/lihost naslednjih funkcij.

   a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
   $$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{liha.}$$

   b) $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$
   $$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^3} = \frac{-\sin x}{-x^3} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{soda.}$$

   c) $f(x) = x + \sqrt{x^4 + x^6}$
   $$f(-x) = -x + \sqrt{x^4 + x^6} \quad \Rightarrow \quad \text{ne soda ne liha.}$$

   d) $f(x) = \frac{\cos x}{x^4+x^2}$
   $$f(-x) = \frac{\cos x}{x^4 + x^2} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{soda.}$$

   e) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$
   $$f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}} = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{liha.}$$

   f) $f(x) = \cos x + \sin x$
   $$f(-x) = \cos x - \sin x \quad \Rightarrow \quad \text{ne soda ne liha.}$$

4. Preverite injektivnost, surjektivnost in bijektivnost naslednjih funkcij.

   a) $f(x) = \mathrm{e}^x$

   Definicijsko območje funkcije je $D_f = \mathbb{R}$, zaloga vrednosti pa $Z_f = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$.

   Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je injektivna, ker je strogo naraščajoča, toda ni surjektivna, ker zaloga vrednosti funkcije ni enaka kodomeni.

   Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ je še vedno injektivna, poleg tega pa tudi surjektivna, saj smo zmanjšali kodomeno na zalogo vrednosti. Torej je funkcija bijektivna.

   b) $f(x) = 8x - 2x^2$

   Funkcija $f(x) = 8x - 2x^2 = -2x(x-4)$ je kvadratna funkcija z ničlama v $x_1 = 0$ in $x_2 = 4$. Največjo vrednost zavzame v točki $x = 2$, in sicer $f(2) = 8$. Torej je definicijsko območje $D_f = \mathbb{R}$, zaloga vrednosti pa $Z_f = (-\infty, 8]$.

   Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ni injektivna, ker so vse vrednosti na intervalu $(-\infty, 8)$ zavzete v dveh različnih točkah. Prav tako ni surjektivna, saj zaloga vrednosti ni enaka kodomeni.

   Funkcija $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ je injektivna, ker je na tem intervalu strogo padajoča, ni pa surjektivna iz istega razloga kot prej.

   Funkcija $f : [2, \infty) \to (-\infty, 8]$ je injektivna in surjektivna, torej bijektivna.

5. Določite kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$ za naslednje funkcije.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\mathrm{e}^x) = (\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = \mathrm{e}^{x^2} \end{aligned}$$

Opazimo, da velja: $f \circ g \neq g \circ f$!

b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = 1 + x^2$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(1 + x^2) = \frac{1}{2 + x^2} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = \frac{2 + 2x + x^2}{1 + 2x + x^2} \end{aligned}$$

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f\left(\sqrt{\tfrac{1-x}{x}}\right) = x \\ (g \circ f)(x) &= g\left(\tfrac{1}{1+x^2}\right) = |x| \end{aligned}$$

6. Določite kompozitume $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ in $g \circ f$ za funkciji $f(x) = -1 + 2x$ in $g(x) = 2 - 3x$.

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(-1 + 2x) = -1 + 2(-1 + 2x) = -3 + 4x \\ (g \circ g)(x) &= g(g(x)) = g(2 - 3x) = 2 - 3(2 - 3x) = -4 + 9x \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2 - 3x) = -1 + 2(2 - 3x) = 3 - 6x \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(-1 + 2x) = 2 - 3(-1 + 2x) = 5 - 6x \end{aligned}$$

7. Poiščite inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$ k naslednjim funkcijam $f(x)$.

a) $f(x) = 1 + \mathrm{arctg}(3x)$

Pišemo $y = 1 + \mathrm{arctg}(3x)$ in zamenjamo vlogi x in y. Nato izrazimo y

$$\begin{aligned} x &= 1 + \mathrm{arctg}(3y) \\ \mathrm{arctg}(3y) &= x - 1 \\ f^{-1}(x) = y &= \tfrac{1}{3}\mathrm{tg}(x - 1). \end{aligned}$$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

Po zamenjavi vlog x in y dobimo

$$\begin{aligned} x &= \frac{2y + 3}{y - 2} \\ x(y - 2) &= 2y + 3 \\ f^{-1}(x) = y &= \frac{2x + 3}{x - 2} = f(x). \end{aligned}$$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Po zamenjavi vlog x in y dobimo

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} \\ x^2(1 + y^2) &= y^2 \\ f^{-1}(x) = y &= \sqrt{\tfrac{x^2}{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

8. Dani sta funkciji $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x}$ in $g(x)=\frac{\ln(x-1)}{2}$. Določite kompozitum $\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)$.

Najprej izračunamo inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} x &= 1+e^{-2y} \\ y &= \frac{\ln(x-1)}{-2}. \end{aligned}$$

Nato izračunamo inverzno funkcijo $g^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\ln(y-1)}{2} \\ y &= e^{2x}+1. \end{aligned}$$

Nazadnje izračunamo kompozitum

$$\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)=e^{2\cdot\frac{\ln(x-1)}{-2}}+1=\frac{1}{x-1}+1=\frac{x}{x-1}.$$

9. Izračunajte naslednje limite.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{3\sin y}{y}=3$$

Substitucija $y=3x$, $x=\frac{y}{3}$, $x\to 0\Rightarrow y\to 0$. Splošneje: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$.

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{x}}{\frac{\sin bx}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{x}}=\frac{a}{b}$$

c) (♣)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2} &= \lim_{y\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-y)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\cos^2\frac{y}{2}+\sin^2\frac{y}{2}-\cos^2\frac{y}{2}+\sin^2\frac{y}{2}}{y^2} \\ &= 2\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin\frac{y}{2}}{y}\right)^2=2\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{y}{2}}{y}\right)^2=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Substitucija $y=\frac{\pi}{2}-x$, $x=\frac{\pi}{2}-y$. Ko gre $x\to\frac{\pi}{2}$, gre $y\to 0$. Upoštevamo enačbe iz trigonometrije: $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$, $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ in $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

d)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{(x+2)\cdot\frac{x}{x+2}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+2}}=e$$

e)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{2x^2}{x^2-1}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}}=e^2$$

f)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=5$$

g)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}}=1$$

Ulomek zgoraj in spodaj delimo z najvišjo potenco x-a, to je z x.

h)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

i)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\sqrt{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=1$$

j)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=0\end{aligned}$$

Uporabimo enakost $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

k)

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2-x}}{x+1}=\frac{1}{2}$$

l)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{3}{4}$$

m)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+5x}-2}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{2x(\sqrt{4+5x}+2)}=\frac{5}{8}$$

n)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}\\ &= \lim_{x\to4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

o)

$$\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}=1$$

p)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\frac{m}{n}$$

r)

$$\lim_{x\to0}x\ln x=\lim_{y\to\infty}(-y)\mathrm{e}^{-y}=0$$

Substitucija $x=\mathrm{e}^{-y}$, $\ln x=-y$, $y=-\ln x$. Ko gre $x\to0$, gre $y\to\infty$.

s)

$$\lim_{x\to0}x^x=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to0}x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim_{y\to\infty}(-y)\mathrm{e}^{-y}}=\mathrm{e}^0=1$$

Uporabimo enakost $x=\mathrm{e}^{\ln x}$ in substitucijo $x=\mathrm{e}^{-y}$, $y=-\ln x$. Ko gre $x\to0$, gre $y\to\infty$.

10. Določite $f(x)$, če je $f(1+x)=2-3x+x^2$.

Uvedemo substitucijo $y=1+x$ oz.1 $x=y-1$

$$f(y)=2-3(y-1)+(y-1)^2=y^2-5y+6.$$

Torej je $f(x)=x^2-5x+6$.

11. Določite vrednost parametra a tako, da bo dana funkcija zvezna.

a) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ x + a, & x \geq 0. \end{cases}$

Edina možna točka nezveznosti je v točki $x = 0$. Da bo funkcija zvezna, mora biti leva limita enaka desni: $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$. Ker je

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 0} f(x) &= \lim_{x \uparrow 0} e^x = 1, \\ \lim_{x \downarrow 0} f(x) &= \lim_{x \downarrow 0} (x + a) = a, \end{aligned}$$

mora biti $a = 1$, da bo funkcija zvezna.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x > 0, \\ a(-x^2 + 1), & x \leq 0. \end{cases}$

Edina možna točka nezveznosti je v točki $x = 0$. Ker je

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 0} f(x) &= \lim_{x \uparrow 0} a(-x^2 + 1) = a, \\ \lim_{x \downarrow 0} f(x) &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2, \end{aligned}$$

mora biti $a = 2$, da bo funkcija zvezna.

c) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

Edina možna točka nezveznosti je $x = 0$. Da bo funkcija zvezna, mora biti limita funkcije enaka vrednosti funkcije v točki $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Velja

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \to \infty} \frac{\sin y}{y} = 0.$$

Uporabimo substitucijo $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{y}$. Ko gre $x \to 0$, gre $y \to \infty$. Upoštevamo še, da je funkcija sinus omejena. Ker je $f(0) = a$, bo funkcija zvezna, ko bo $a = 0$.

12. Tam, kjer funkcija $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ 4 - 2x, & 1 \leq x < \frac{5}{2}, \\ 2x - 7, & \frac{5}{2} \leq x \leq 4 \end{cases}$ ni zvezna, določite levo in desno limito.

Možni točki nezveznosti sta v $x_1 = 1$ in $x_2 = \frac{5}{2}$, kjer izračunamo levo in desno limito.

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 1} f(x) &= \lim_{x \uparrow 1} 2\sqrt{x} = 2 \\ \lim_{x \downarrow 1} f(x) &= \lim_{x \downarrow 1} (4 - 2x) = 2 \end{aligned}$$

Ker sta limiti enaki, je v točki $x_1 = 1$ funkcija zvezna.

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow \frac{5}{2}} f(x) &= \lim_{x \uparrow \frac{5}{2}} (4 - 2x) = -1 \\ \lim_{x \downarrow \frac{5}{2}} f(x) &= \lim_{x \downarrow \frac{5}{2}} (2x - 7) = -2 \end{aligned}$$

Limiti nista enaki, torej funkcija v točki $x_2 = \frac{5}{2}$ ni zvezna.

13. Narišite grafe naslednjih funkcij.

a) $f(x) = 3 - |x|$

Funkcijo zapišemo brez absolutnih vrednosti $f(x) = \begin{cases} 3 + x, & x < 0, \\ 3 - x, & x \geq 0, \end{cases}$ in narišemo.

b) $f(x) = 2 - 3x + x^2$

To je kvadratna funkcija z ničlama $x_1 = 1$ in $x_2 = 2$, začetno vrednostjo v točki $(0, 2)$ ter temenom v točki $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$.

c) $f(x) = \frac{4x-3}{3x+2}$

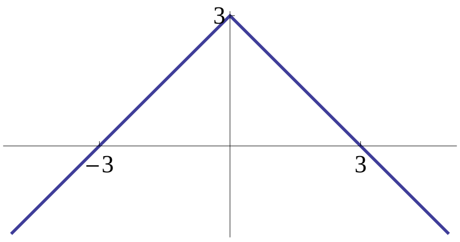
To je racionalna funkcija z ničlo $x = \frac{3}{4}$, polom v točki $x = -\frac{2}{3}$, vodoravno asimptoto $y = \frac{4}{3}$ ter začetno vrednostjo $f(0) = -\frac{3}{2}$.

d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

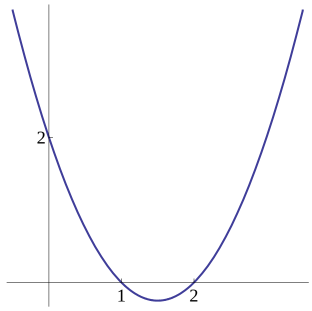
Najprej narišemo kvadratno funkcijo $-x^2$, nato pa z uporabo lastnosti eksponentne funkcije ($\mathrm{e}^0 = 1$, $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$) narišemo še funkcijo $f(x)$.

e) $f(x) = x + \arctan x$

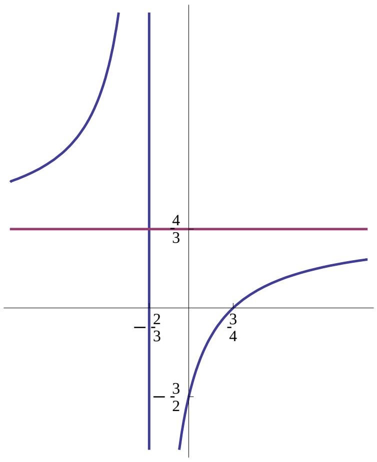
Graf funkcije je omejen z asimptotama $y = x \pm \frac{\pi}{2}$.



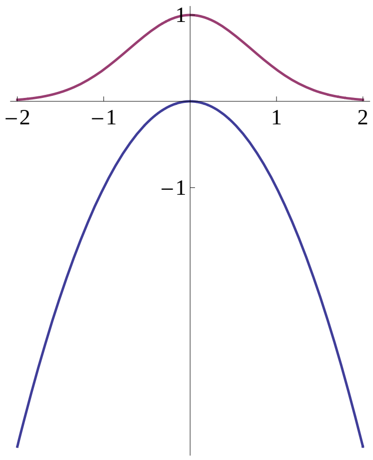
a) $f(x) = 3 - |x|$



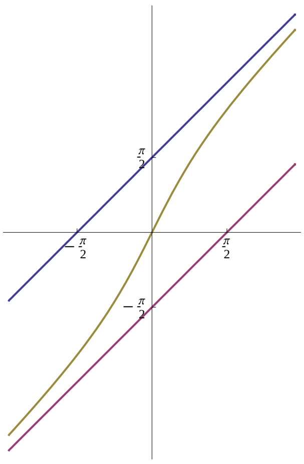
b) $f(x) = 2 - 3x + x^2$



c) $f(x) = \frac{4x-3}{3x+2}$



d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$



e) $f(x) = x + \arctan x$

ODVODI

Pravila za odvajanje:

$$\begin{aligned}
(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x) \\
(C \cdot f(x))' &= C \cdot f'(x) \quad (C = \text{konst.}) \\
(f(x) \cdot g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Tabela elementarnih odvodov:

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(C)' = 0 \quad (C = \text{konst.})$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

L'Hopitalovo pravilo:
Če računamo limito ulomka oblike $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$, velja

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1. Odvajajte naslednje funkcije.

a) $f(x) = 3\sin x - 5\cos x$

$$f'(x) = 3\cos x + 5\sin x$$

b) $f(x) = x^2 + \sqrt{x+1}$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

c) $f(x) = x\,\sqrt{1+x^2}$

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

d) $f(x) = x\;\mathrm{arctg}x$

$$f'(x) = \mathrm{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}$$

e) $f(x) = \mathrm{e}^x\cos x$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{e}^x \cdot (-\sin x) = \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$$

f) $f(x) = \frac{x^2-5x-1}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{(2x-5)x^3 - (x^2-5x-1)3x^2}{x^6} = \frac{-x^2+10x+3}{x^4}$$

g) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

$$f'(x) = \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2\cos^2 x - 2\sin^2 x}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x} = \frac{2}{\sin 2x - 1}$$

h) $f(x) = \ln(\sin x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \mathrm{ctg} x$$

i) $f(x) = \ln^3(x^2)$

$$f'(x) = 3\ln^2(x^2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6\ln^2(x^2)}{x}$$

j) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$$

k) $f(x) = \mathrm{e}^x \cos^2 x$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \cos^2 x - 2\mathrm{e}^x \cos x \sin x = \mathrm{e}^x \left(\cos^2 x - \sin 2x\right)$$

l) $f(x) = x\, \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{x}}$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{x}} + x\, \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{x}} \cdot \frac{2x^2 - (x^2-1)}{x^2} = \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{x}} \left(1 + x + \frac{1}{x}\right)$$

m) $f(x) = \ln\sqrt{x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot 2x = \frac{1}{x}$$

n) $f(x) = \mathrm{arctg}\frac{1+x}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

o) $f(x) = \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\cos x)}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln(\cos x) + \ln(\sin x) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x}{\ln^2(\cos x)} = \frac{\mathrm{ctg} x \cdot \ln(\cos x) + \mathrm{tg} x \cdot \ln(\sin x)}{\ln^2(\cos x)}$$

p) $f(x) = \ln(\ln^2(\ln^3(x)))$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln^2(\ln^3(x))} \cdot 2\ln(\ln^3(x)) \cdot \frac{1}{\ln^3(x)} \cdot 3\ln^2(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x \ln(x) \ln(\ln^3(x))}$$

2. Z uporabo enakosti $x = \mathrm{e}^{\ln x}$ odvajajte naslednje funkcije.

a) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{1}{x}} = \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x} \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}(1 - \ln x) \end{aligned}$$

b) $f(x) = x^{\sin x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\sin x} = \mathrm{e}^{\ln x\ \sin x} \\ f'(x) &= \mathrm{e}^{\ln x\ \sin x}\left(\frac{1}{x}\sin x + \ln x\ \cos x\right) \end{aligned}$$

3. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}$. Določite $f'(0)$ in $f'(-1)$.

   Izračunamo odvod funkcije
$$f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{-6x}{(x^2+1)^2}.$$
   Sledi $f'(0) = -\frac{1}{4}$ in $f'(-1) = \frac{1}{2}$.

4. Funkciji hiperbolični kosinus (ch) in hiperbolični sinus (sh) sta definirani s predpisoma
$$\mathrm{ch}x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{sh}x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$
   Izračunajte $\mathrm{ch}'x$ in $\mathrm{sh}'x$.

   Odvajamo
$$\begin{aligned} \mathrm{ch}'x &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{sh}x, \\ \mathrm{sh}'x &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}x. \end{aligned}$$

5. Odvajajte implicitno podane funkcije.

   a) $x + y = x^2 + x^3$

   Najprej odvajamo levo in desno stran enačbe ter nato izrazimo y'.
$$1 + y' = 2x + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2x + 3x^2 - 1$$

   b) $x^2 - xy + y^2 = 0$
$$\begin{aligned} 2x - y - xy' + 2yy' &= 0 \\ y' &= \frac{y - 2x}{2y - x} \end{aligned}$$

   c) $x^2 + 3xy - y^2 = 3x + 5$
$$\begin{aligned} 2x + 3y + 3xy' - 2yy' &= 3 \\ y' &= \frac{3 - 2x - 3y}{3x - 2y} \end{aligned}$$

   d) $\ln y + \frac{x}{y} = 2$
$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' + \frac{y - xy'}{y^2} &= 0 \\ y' &= \frac{y}{x - y} \end{aligned}$$

   e) $\ln(x^2 + y^2) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$
$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (2x + 2yy') &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} \\ \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} &= \frac{y'x - y}{x^2 + y^2} \\ 2x + 2yy' &= y'x - y \\ y'(x - 2y) &= 2x + y \\ y' &= \frac{2x + y}{x - 2y} \end{aligned}$$

6. Z uporabo L'Hopitalovega pravila izračunajte naslednje limite.

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}=\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3}=\frac{2}{3}$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\mathrm{e}^x+1)-2(\mathrm{e}^x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{e}^x}{6x}=\frac{1}{6}$$

7. Poiščite drugi odvod naslednjih funkcij.

a) $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$

Drugi odvod dobimo tako, da prvi odvod še enkrat odvajamo.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{e}^{\sin x}\cos^2 x-\mathrm{e}^{\sin x}\sin x=\mathrm{e}^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)\\
f''(x) &= \mathrm{e}^{\sin x}\cos x(\cos^2 x-\sin x)+\mathrm{e}^{\sin x}(-2\cos x\sin x-\cos x)\\
&= \mathrm{e}^{\sin x}\cos x(\cos^2 x-3\sin x-1)
\end{aligned}$$

b) $f(x)=x(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sin(\ln x)+\cos(\ln x)+x\left(\cos(\ln x)\tfrac{1}{x}-\sin(\ln x)\tfrac{1}{x}\right)=2\cos(\ln x)\\
f''(x) &= -\tfrac{2}{x}\sin(\ln x)
\end{aligned}$$

c) $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\\
f''(x) &= \frac{4x\sqrt{1+x^2}-\frac{2x(1+2x^2)}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{3x+2x^3}{(1+x^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

d) $x=\ln(1+y)$

Implicitno dvakrat odvajamo.

$$1=\frac{y'}{1+y}\quad\Rightarrow\quad y'=1+y\quad\Rightarrow\quad y''=y'=1+y$$

8. Izračunajte vrednost tretjega odvoda $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$ v točki $(1,1)$, če je $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$.

Implicitno podano krivuljo trikrat odvajamo

$$\begin{aligned}
2x+2xy'+2y+2yy'-4+2y' &= 0,\\
x+xy'+y+yy'-2+y' &= 0,\\
1+2y'+xy''+(y')^2+yy''+y'' &= 0,\\
3y''+xy'''+3y'y''+yy'''+y''' &= 0.
\end{aligned}$$

Izrazimo ustrezne odvode in jih izračunamo v dani točki

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2-x-y}{x+y+1} &&\Rightarrow\quad y'(1,1)=0,\\
y'' &= \frac{-1-y'-(y')^2}{x+y+1} &&\Rightarrow\quad y''(1,1)=-\tfrac{1}{3},\\
y''' &= \frac{-3y''-3y'y''}{x+y+1} &&\Rightarrow\quad y'''(1,1)=\tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

9. Poiščite n-ti odvod funkcije $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$.

   Izračunajmo prvih nekaj odvodov

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3\mathrm{e}^{-3x}, \\ f''(x) &= (-3)^2\mathrm{e}^{-3x}, \\ f'''(x) &= (-3)^3\mathrm{e}^{-3x}. \end{aligned}$$

   Splošna formula za n-ti odvod

$$f^{(n)}(x) = (-3)^n\mathrm{e}^{-3x}.$$

10. Poiščite n-ti odvod funkcije $f(x) = \sin^2 x$.

    Izračunajmo prvih nekaj odvodov

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x\cos x = \sin 2x, \\ f''(x) &= 2\cos 2x, \\ f'''(x) &= -4\sin 2x, \\ f^{(4)}(x) &= -8\cos 2x. \end{aligned}$$

    Splošna formula za n-ti odvod

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}}2^{n-1}\sin 2x, & n \text{ lih}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}+1}2^{n-1}\cos 2x, & n \text{ sod}. \end{cases}$$

11. (♣) Poiščite n-ti odvod funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}$, $a \in \mathbb{R}$, tako, da jo zapišete s parcialnimi ulomki.

    Funkcijo $f(x)$ najprej razbijemo na parcialne ulomke

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{(A+B)x + a(A-B)}{x^2-a^2}.$$

    Dobimo sistem enačb $A + B = 0$ in $a(A - B) = 1$, ki ima rešitev $A = \frac{1}{2a}$ in $B = -\frac{1}{2a}$. Funkcijo $f(x)$ nato odvajamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)} = \frac{1}{2a}\left((x-a)^{-1} - (x+a)^{-1}\right), \\ f'(x) &= \frac{1}{2a}\left(-(x-a)^{-2} + (x+a)^{-2}\right), \\ f''(x) &= \frac{1}{2a}\left(2(x-a)^{-3} - 2(x+a)^{-3}\right), \\ f'''(x) &= \frac{1}{2a}\left(-6(x-a)^{-4} + 6(x+a)^{-4}\right). \end{aligned}$$

    Od tu izpeljemo splošno formulo za n-ti odvod

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2a}(-1)^n n!\left((x-a)^{-n-1} - (x+a)^{-n-1}\right).$$

12. Določite parametra a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x + x^2 + 1, & x < 0, \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$$

    zvezno odvedljiva.

Funkcija je zvezno odvedljiva, ko sta funkcija in odvod zvezni funkciji. Edina možna točka nezveznosti je v $x = 0$. Pogoja: $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x)$ in $\lim_{x\uparrow 0} f'(x) = \lim_{x\downarrow 0} f'(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0} f(x) &= \lim_{x\uparrow 0}(\mathrm{e}^x + x^2 + 1) = 2\\ \lim_{x\downarrow 0} f(x) &= \lim_{x\downarrow 0}(ax + b) = b\end{aligned}$$

Da bo funkcija zvezna, mora biti $b = 2$. Odvod funkcije je

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x + 2x, & x < 0,\\ a, & x \geq 0.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0} f'(x) &= \lim_{x\uparrow 0}(\mathrm{e}^x + 2x) = 1\\ \lim_{x\downarrow 0} f'(x) &= \lim_{x\downarrow 0} a = a\end{aligned}$$

Da bo odvod funkcije zvezen, mora biti $a = 1$.

13. Določite parametra a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x \leq 0,\\ ax + b, & x > 0\end{cases}$$

zvezno odvedljiva.

Edina možna točka nezveznosti je v $x = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0} f(x) &= \lim_{x\uparrow 0}(x^2 + 2x - 1) = -1\\ \lim_{x\downarrow 0} f(x) &= \lim_{x\downarrow 0}(ax + b) = b\end{aligned}$$

Da bo funkcija zvezna, mora biti $b = -1$. Odvod funkcije je

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \leq 0,\\ a, & x > 0.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0} f'(x) &= \lim_{x\uparrow 0}(2x + 2) = 2\\ \lim_{x\downarrow 0} f'(x) &= \lim_{x\downarrow 0} a = a\end{aligned}$$

Da bo odvod funkcije zvezen, mora biti $a = 2$.

14. Določite parametre a, b, c in d tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x < 0,\\ \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\\ cx + d, & x > \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

zvezna in zvezno odvedljiva.

Funkcija $f(x)$ je zvezna v točki x_0, ko je $\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x)$ in zvezno odvedljiva, ko je $\lim_{x\uparrow x_0} f'(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f'(x)$. Najprej izračunamo odvod

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & x < 0,\\ -\sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\\ c, & x > \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Preverimo zveznost in zvezno odvedljivost v točki $x = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\uparrow 0} f(x) &= \lim_{x\uparrow 0}(x^2 + ax + b) = b, \\
\lim_{x\downarrow 0} f(x) &= \lim_{x\downarrow 0}(\cos x) = 1, \\
\lim_{x\uparrow 0} f'(x) &= \lim_{x\uparrow 0}(2x + a) = a, \\
\lim_{x\downarrow 0} f'(x) &= \lim_{x\downarrow 0}(-\sin x) = 0.
\end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb sledi, da je $b = 1$, iz drugih dveh pa, da je $a = 0$. Preverimo še zveznost in zvezno odvedljivost v točki $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\uparrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x\uparrow \frac{\pi}{2}}(\cos x) = 0, \\
\lim_{x\downarrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x\downarrow \frac{\pi}{2}}(cx + d) = \frac{c\pi}{2} + d, \\
\lim_{x\uparrow \frac{\pi}{2}} f'(x) &= \lim_{x\uparrow \frac{\pi}{2}}(-\sin x) = -1, \\
\lim_{x\downarrow \frac{\pi}{2}} f'(x) &= \lim_{x\downarrow \frac{\pi}{2}}(c) = c.
\end{aligned}$$

Iz drugih dveh enačb sledi, da je $c = -1$, iz prvih dveh pa nato, da je $d = \frac{\pi}{2}$.

UPORABA ODVODOV

Monotonost funkcij:

i) Funkcija f je naraščajoča, če je $f' > 0$.

ii) Funkcija f je padajoča, če je $f' < 0$.

Konveksnost/konkavnost funkcij:

i) Funkcija f je konveksna, če je $f'' > 0$.

ii) Funkcija f je konkavna, če je $f'' < 0$.

Ekstremi funkcij:

Točka a je stacionarna točka funkcije $f(x)$, če je $f'(a) = 0$.
Če je $f''(a) < 0$, potem je v točki a maksimum.
Če je $f''(a) > 0$, potem je v točki a minimum.
Če je $f''(a) = 0$, potem je v točki a sedlo.

Tangente in normale:

Smerni koeficient tangente na funkcijo $f(x)$ v točki (x_0, y_0) je $k_t = f'(x_0)$.
Smerni koeficient normale na funkcijo $f(x)$ v točki (x_0, y_0) je $k_n = -\frac{1}{k_t}$.
Enačba premice skozi točko (x_0, y_0) in smernim koeficientom k se glasi $y - y_0 = k(x - x_0)$.
Enačba premice skozi točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2) se glasi $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

1. Določite intervale naraščanja in padanja funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.

   Funkcijo najprej odvajamo
   $$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12.$$
   Funkcija je naraščajoča na intervalu, kjer je $f'(x) > 0$, torej, ko je $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) > 0$. Rešitev kvadratne neenačbe je unija intervalov $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. Funkcija je padajoča na intervalu, kjer je $f'(x) < 0$, torej na intervalu $(-2, 1)$.

2. Določite intervale naraščanja in padanja funkcije $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

   Funkcijo najprej odvajamo
   $$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1+x^2)^2}.$$
   Funkcija je naraščajoča na intervalu, kjer je $f'(x) > 0$
   $$\begin{aligned} 1 - x^2 &> 0 \\ x^2 &< 1 \\ |x| &< 1 \end{aligned}$$
   Torej je funkcija naraščajoča na intervalu $(-1, 1)$. Funkcija je padajoča na intervalu, kjer je $f'(x) < 0$. Dobimo, da je funkcija padajoča na uniji intervalov $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

3. Določite intervale naraščanja in padanja funkcije $f(x) = |x^2 - 1| + |x + 2|$.

   Funkcijo najprej prepišemo v obliko brez absolutnih vrednosti
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 3, & x < -2, \\ x^2 + x + 1, & -2 \le x < -1, x \ge 1, \\ -x^2 + x + 3, & -1 \le x < 1. \end{cases}$$

Odvajamo

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < -2, \\ 2x+1, & -2 \le x < -1, x \ge 1, \\ -2x+1, & -1 \le x < 1. \end{cases}$$

Funkcija je naraščajoča na intervalih, kjer je $f'(x) > 0$ in padajoča tam, kjer je $f'(x) < 0$. Ker za posamezne predpise velja: $2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$, $2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$ in $-2x+1 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$, je funkcija naraščajoča na uniji intervalov $(-1, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$ ter padajoča na uniji intervalov $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 1)$.

4. Določite in klasificirajte stacionarne točke naslednjih funkcij.

a) $f(x) = 8x - 2x^2$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer je

$$f'(x) = 8 - 4x = 0,$$

torej pri $x = 2$. Drugi odvod je $f''(x) = -4$. Ker je $f''(2) = -4 < 0$, je v točki $x = 2$ lokalni maksimum.

b) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer je

$$f'(x) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x} = 0,$$

torej pri $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$. Drugi odvod je $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-x}$. Ker je $f''(0) = 2 > 0$, je v točki $x_1 = 0$ lokalni minimum, in ker je $f''(2) = -2\mathrm{e}^{-2} < 0$, je v točki $x_2 = 2$ lokalni maksimum.

c) $f(x) = (x^2 - 6x + 9)\mathrm{e}^x$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer je

$$f'(x) = (x-1)(x-3)\mathrm{e}^x = 0,$$

torej pri $x_1 = 1$ in $x_2 = 3$. Drugi odvod je $f''(x) = (x^2 - 2x - 1)\mathrm{e}^x$. Ker je $f''(1) = -2\mathrm{e} < 0$, je v točki $x_1 = 1$ lokalni maksimum, in ker je $f''(3) = 2\mathrm{e}^3 > 0$, je v točki $x_2 = 3$ lokalni minimum.

5. Določite točke, kjer funkcija $f(x)$ doseže največjo oz. najmanjšo vrednost na intervalu I.

a) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}, \quad I = [0, 4]$

Izračunamo prvi odvod

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2-3x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}.$$

Stacionarne točke so rešitve enačbe $(x+3)(x-1) = 0$, ki ima dve rešitvi: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Prva ne leži na danem intervalu, zato nas zanima samo druga rešitev. Ker je v točkah levo od 1 prvi odvod negativen, v točkah desno od 1 pa pozitiven, je v tej točki lokalni minimum. Vrednost funkcije je $f(1) = -1$. Preverimo še vrednosti v krajiščih intervala: $f(0) = 0$, $f(4) = \frac{4}{5}$. Največja vrednost je torej dosežena v točki $(4, \frac{4}{5})$, najmanjša pa v točki $(1, -1)$.

b) $f(x) = 2\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^2 x, \quad I = [0, \frac{\pi}{2})$

Izračunamo prvi odvod

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 2\mathrm{tg}x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2(1-\mathrm{tg}x)}{\cos^2 x}.$$

Stacionarne točke so rešitve enačbe $\text{tg}x = 1$, ki ima na danem intervalu rešitev $x = \frac{\pi}{4}$. Rešitev gornje enačbe je sicer neskončno, a le ena leži na danem intervalu. Ker je v točkah levo od $\frac{\pi}{4}$ prvi odvod pozitiven, v točkah desno od $\frac{\pi}{4}$ pa negativen, je v tej točki lokalni maksimum. Vrednost funkcije je $f(\frac{\pi}{4}) = 1$. Preverimo še vrednost v levem krajišču intervala: $f(0) = 0$ in limito funkcije, ko se približujemo desnemu krajišču intervala

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (2\text{tg}x - \text{tg}^2 x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = -\infty.$$

Največja vrednost je torej dosežena v točki $(\frac{\pi}{4}, 1)$, najmanjša vrednost pa ne obstaja.

6. Zapišite enačbo tangente in normale na krivuljo v dani točki T.

a) $y = x^2(2-x)^2, \quad T(3, y)$

Funkcijo $y = x^2(2-x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ odvajamo in dobimo $y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$. Smerni koeficient tangente je $k_t = y'(3) = 24$, smerni koeficient normale pa $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{24}$. Točka $T(3, 9)$. Enačba tangente se glasi

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_t(x - x_0), \\ y &= 24x - 63. \end{aligned}$$

Enačba normale pa

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_n(x - x_0), \\ y &= -\tfrac{1}{24}x + \tfrac{73}{8}. \end{aligned}$$

b) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, \quad T(-2, 5)$

Odvajamo in dobimo $y' = 3x^2 + 4x - 4$. Smerni koeficient tangente je $k_t = y'(-2) = 0$. Enačba tangente se glasi

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_t(x - x_0), \\ y &= 5. \end{aligned}$$

Enačba normale pa $x = -2$. Tangenta je vzporedna z osjo x, normala pa z osjo y. Dana točka je tako stacionarna točka.

c) $y = \ln(\sin x), \quad T(\frac{\pi}{2}, y)$

Odvajamo in dobimo $y' = \text{ctg}x$. Točka $T(\frac{\pi}{2}, 0)$. Smerni koeficient tangente je $k_t = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$. Enačba tangente se glasi $y = 0$, enačba normale pa $x = \frac{\pi}{2}$.

d) $y = x^{\cos x}, \quad x_0 = \pi$

Z uporabo enakosti $x = \mathrm{e}^{\ln x}$ dobimo $y = \mathrm{e}^{\cos x \ln x}$. Odvajamo in dobimo

$$y' = \mathrm{e}^{\cos x \ln x}\left(-\sin x \ln x + \tfrac{\cos x}{x}\right).$$

Izračunamo še vrednost funkcije v točki $x_0 = \pi$: $y_0 = y(\pi) = \frac{1}{\pi}$. Torej $T(\pi, \frac{1}{\pi})$. Smerni koeficient tangente je $k_t = y'(\pi) = -\frac{1}{\pi^2}$. Enačba tangente se glasi

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_t(x - x_0), \\ y &= -\tfrac{1}{\pi^2}x + \tfrac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Smerni koeficient normale je $k_n = -\frac{1}{k_t} = \pi^2$. Enačba normale pa

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_n(x - x_0), \\ y &= \pi^2 x - \pi^3 + \tfrac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

e) $y^2 + y - 6x = 0, \quad T(1, -3)$

Krivuljo implicitno odvajamo in dobimo

$$2yy' + y' - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{6}{2y+1}.$$

Smerni koeficient tangente je $k_t = y'(x_0, y_0) = y'(1, -3) = -\frac{6}{5}$. Enačba tangente se glasi

$$\begin{aligned} y + 3 &= -\tfrac{6}{5}(x-1), \\ y &= -\tfrac{6}{5}x - \tfrac{9}{5}. \end{aligned}$$

Smerni koeficient normale je $k_n = -\frac{1}{k_t} = \frac{5}{6}$. Enačba normale pa

$$\begin{aligned} y + 3 &= \tfrac{5}{6}(x-1), \\ y &= \tfrac{5}{6}x - \tfrac{23}{6}. \end{aligned}$$

7. Poiščite tisto točko na intervalu $[0, 3]$, v kateri je tangenta na krivuljo $f(x) = x^2$ vzporedna premici skozi točki $A(0, f(0))$ in $B(3, f(3))$.

Točki sta $A(0, 0)$ in $B(3, 9)$. Enačba premice skozi dve točki je

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \\ y &= 3x. \end{aligned}$$

Ker sta premici vzporedni, sta smerna koeficienta te premice in tangente enaka

$$\begin{aligned} y'(x_0) = k_t &= 3 \\ 2x_0 &= 3 \\ x_0 &= \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $f'(x) = 2x$. Torej je $y_0 = f(x_0) = \frac{9}{4}$. Iskana točka je $T(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$.

8. Poiščite tisto normalo na krivuljo $y = x \ln x$, ki je vzporedna premici $2x - 2y + 3 = 0$.

Premico $2x - 2y + 3 = 0$ zapišemo v eksplicitni obliki $y = x + \frac{3}{2}$, od koder dobimo smerni koeficient $k = 1$, zato je $k_n = 1$ in $k_t = -1$. Iščemo še točko. Odvod funkcije je $y' = \ln x + 1$. Sledi

$$\begin{aligned} k_t = y'(x_0) = \ln x_0 + 1 &= -1 \\ \ln x_0 &= 2 \\ x_0 &= \mathrm{e}^{-2}. \end{aligned}$$

Zato je $y_0 = -2\mathrm{e}^{-2}$ in $T(\mathrm{e}^{-2}, -2\mathrm{e}^{-2})$. Enačba normale je tedaj $y = x - 3\mathrm{e}^{-2}$.

9. Določite kot pod katerim se sekata krivulji $y = \sin x$ in $y = \sin 2x$ v izhodišču.

Krivulji y_1 in y_2 se sekata pod istim kotom kot tangenti na ti dve krivulji v presečišču. Vemo, da je smerni koeficient premice enak tangensu kota, ki ga premica oklepa s pozitivnim poltrakom x-osi. Presečišče je v točki $T(0, 0)$.
Ker je $y_1 = \sin x$ in zato $y_1' = \cos x$, je $k_1 = y_1'(0) = 1$. Podobno, ker je $y_2 = \sin 2x$ in zato $y_2' = 2\cos 2x$, je $k_2 = y_2'(0) = 2$. Označimo $k_1 = \mathrm{tg}\alpha$ in $k_2 = \mathrm{tg}\beta$. Iščemo kot $\varphi = \beta - \alpha$. Iz trigonometrije poznamo formulo

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\varphi &= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{1}{3}, \\ \varphi &= \mathrm{arctg}\tfrac{1}{3} \approx 18^\circ 26'. \end{aligned}$$

10. Z diferencialom izračunajte približno vrednost funkcije $f(x) = \sqrt{3x^2 + 3x + 4}$ pri $x_0 = \frac{8}{100}$.

Približno vrednost funkcije s pomočjo diferenciala izračunamo po formuli

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

Odvod funkcije je

$$f'(x) = \frac{6x+3}{2\sqrt{3x^2+3x+4}}.$$

Vrednost funkcije in odvoda preprosto izračunamo v točki $a = 0$, ki je blizu $x_0 = \frac{8}{100}$: $f(0) = 2$ in $f'(0) = \frac{3}{4}$. Sledi

$$f\left(\tfrac{8}{100}\right) \approx 2 + \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{8}{100} = 2.06.$$

Za primerjavo: točna vrednost na 5 decimalk je $f(\frac{8}{100}) = 2.06378$.

11. S pomočjo diferenciala izračunajte približno vrednost za $\sqrt[4]{17}$ in $\sqrt[5]{31}$.

Vrednost četrtega korena znamo lepo izračunati pri 16, ki je blizu 17, torej $a = 16$, $h = 1$. Odvod funkcije $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ je

$$f'(x) = \tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}.$$

Dobimo $f(16) = 2$, $f'(16) = \frac{1}{32}$ in

$$\sqrt[4]{17} \approx 2 + 1 \cdot \tfrac{1}{32} = 2.03125.$$

Točna vrednost na 5 decimalk je $\sqrt[4]{17} = 2.03054$.
Vrednost petega korena znamo lepo izračunati pri 32, ki je blizu 31, torej $a = 32$, $h = -1$. Odvod funkcije $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$ je

$$f'(x) = \tfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}.$$

Dobimo $f(32) = 2$, $f'(32) = \frac{1}{80}$ in

$$\sqrt[5]{31} \approx 2 - 1 \cdot \tfrac{1}{80} = 1.9875.$$

Točna vrednost na 5 decimalk je $\sqrt[5]{31} = 1.98734$.

12. Razstavite število 36 na produkt dveh faktorjev tako, da bo vsota njunih kvadratov najmanjša.

Pišemo $36 = x \cdot y$ in iščemo taka x in y, da bo $x^2 + y^2$ minimalno. Torej je $y = \frac{36}{x}$. Funkcijo $f(x) = x^2 + \frac{36^2}{x^2}$ odvajamo in dobimo

$$f'(x) = 2x - \frac{2 \cdot 36^2}{x^3} = \frac{2(x^4 - 6^4)}{x^3}.$$

Ekstremno vrednost dosežemo tam, kjer je $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} x^4 - 6^4 &= 0 \\ (x-6)(x+6)(x^2+36) &= 0 \end{aligned}$$

Od tod sledita dve rešitvi: $x_1 = 6$, $y_1 = 6$ ter $x_2 = -6$, $y_2 = -6$.

13. Določite stranici pravokotnika z obsegom 20 enot, ki bo imel največjo ploščino.

Obseg pravokotnika je $2a + 2b = 20$, od koder sledi $b = 10 - a$. Ploščino izračunamo po formuli $p = ab$. Ekstremno vrednost dobimo tam, kjer je odvod funkcije $p(a) = 10a - a^2$ enak 0

$$p'(a) = 10 - 2a = 0.$$

Od tod sledi, da je $a = b = 5$ in ta pravokotnik je kvadrat.

14. Poiščite točko na krivulji $y = \sqrt{-\ln x}$, ki je najmanj oddaljena od izhodišča.

Funkcija razdalje točke $T(x, y)$ do izhodišča je $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ker je $y = \sqrt{-\ln x}$, iščemo minimum funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 - \ln x}$. Odvajamo in dobimo

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - \ln x}} \cdot \left(2x - \tfrac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 - 1}{2x\sqrt{x^2 - \ln x}}.$$

Minimalno vrednost dobimo tam, kjer je odvod enak 0, torej, ko je $2x^2 - 1 = 0$, oz. $x^2 = \frac{1}{2}$. Enačba ima sicer dve rešitvi, vendar je dana funkcija definirana le za $x \in (0, 1]$ in zato pride v poštev le $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Torej je točka $T(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\ln \sqrt{2}})$ najbližje izhodiscu.

15. Na paraboli $y^2 = 4x$ poiščite točko, ki je najbližja točki $T(6, 0)$.

Funkcijo razdalje zapišemo kot funkcijo spremenljivke x

$$d(x) = \sqrt{(x - 6)^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 8x + 36}.$$

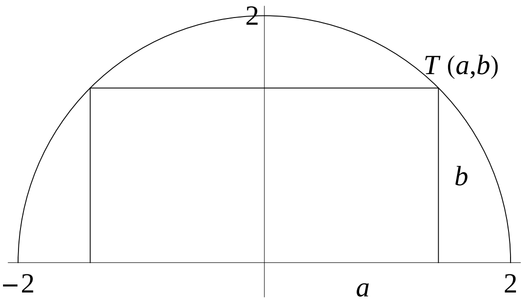
Odvajamo in dobimo

$$d'(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 36}}.$$

Ekstremno vrednost dobimo tam, kjer je $d'(x) = 0$, torej pri $x = 4$. Tako dobimo dve (simetrični) točki $T_1(4, -4)$ in $T_2(4, 4)$, ki sta najbližji dani točki. Razdalja je $d = 2\sqrt{5}$.

16. V polkrog z radijem 2 včrtajte pravokotnik z največjo ploščino. Določite stranici pravokotnika.

Za stranici pravokotnika (glej skico) velja zveza $b = \sqrt{4 - a^2}$. (Oglišče $T(a, b)$ leži na krožnici $x^2 + y^2 = 4$.)



Slika 5: Polkrog z včrtanim pravokotnikom.

Ploščino izračunamo po formuli $p = 2ab$, zato maksimiziramo funkcijo $p(a) = 2a\sqrt{4 - a^2}$. Odvajamo in dobimo

$$p'(a) = 2\sqrt{4 - a^2} + 2a \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 - a^2}} \cdot (-2a) = \frac{4(2 - a^2)}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

Največjo vrednost dobimo tam, kjer je odvod enak 0, torej, ko je $a^2 = 2$. Ker mora imeti stranica pozitivno vrednost, dobimo $a = b = \sqrt{2}$, in največja ploščina je enaka $p = 4$.

17. Iz pravokotnika s stranicama 8 in 5 enot izrežite v vsakem vogalu kvadrat s stranico x enot, nato pa iz tako dobljene mreže sestavite odprto škatlo. Koliko naj bo x, da bo prostornina tako dobljene škatle največja?

Prostornino škatle izračunamo po formuli

$$V(x) = (8 - 2x)(5 - 2x)x = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$$

Odvajamo in dobimo

$$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40.$$

Ekstremno vrednost dobimo tam, kjer je $V'(x) = 0$, torej ko je $3x^2 - 13x + 10 = (x-1)(3x-10) = 0$. Od dveh rešitev $x_1 = 1$ in $x_2 = \frac{10}{3}$ je smiselna le prva.

18. Krogli s polmerom R včrtajte valj z največjo prostornino. Določite polmer r valja.

    Velja zveza (Pitagorov izrek) $R^2 = r^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$, kjer je v višina valja. Torej $r^2 = R^2 - \frac{v^2}{4}$. Prostornino valja izračunamo po formuli $V = \pi r^2 v$. Iščemo torej maksimum funkcije

    $$V(v) = \pi\left(R^2 - \frac{v^2}{4}\right)v = \pi R^2 v - \pi\frac{v^3}{4}.$$

    Odvajamo in dobimo

    $$V'(v) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi v^2.$$

    Ekstremno vrednost dobimo, ko je $V'(v) = 0$, torej ko je $\pi R^2 = \frac{3}{4}\pi v^2$. Sledi $v^2 = \frac{4}{3}R^2$ in zato $v = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Tedaj je $r^2 = R^2 - \frac{1}{3}R^2 = \frac{2}{3}R^2$, torej je polmer enak $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$.

19. Odprt stožec (brez osnovne ploskve) ima prostornino $\frac{\sqrt{2\pi}}{3}$. Kolikšen je polmer osnovne ploskve, če naj ima od vseh takih stožcev najmanjšo površino?

    Velja zveza $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{\sqrt{2\pi}}{3}$, kjer so V, r in v prostornina, polmer in višina stožca, torej $v = \frac{\sqrt{2}}{r^2\sqrt{\pi}}$. Površino (plašč) odprtega stožca izračunamo po formuli $P = \pi r s$, kjer je s dolžina stranice. Iz Pitagorovega izreka dobimo zvezo $s^2 = r^2 + v^2$. Ko vstavimo enačbo za v dobimo $s^2 = \frac{2+\pi r^6}{\pi r^4}$. Iščemo minimum funkcije

    $$P(r) = \pi r\sqrt{\frac{2+\pi r^6}{\pi r^4}} = \frac{1}{r}\sqrt{2\pi + \pi^2 r^6}.$$

    Odvajamo in dobimo

    $$P'(r) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2\pi+\pi^2 r^6}} \cdot 6\pi^2 r^5 \cdot r - \sqrt{2\pi + \pi^2 r^6} \cdot 1}{r^2} = \frac{2\pi(\pi r^6 - 1)}{r^2\sqrt{2\pi + \pi^2 r^6}}.$$

    Ekstrem dobimo tam, kjer je $P'(r) = 0$, torej, ko je $\pi r^6 - 1 = 0$. Razstavimo in dobimo

    $$\begin{aligned}(\sqrt{\pi}r^3 - 1)(\sqrt{\pi}r^3 + 1) &= 0,\\ (\sqrt[6]{\pi}r - 1)(\sqrt[3]{\pi}r^2 + \sqrt[6]{\pi}r + 1)(\sqrt[6]{\pi}r + 1)(\sqrt[3]{\pi}r^2 - \sqrt[6]{\pi}r + 1) &= 0.\end{aligned}$$

    Rešitev je $r = \frac{1}{\sqrt[6]{\pi}}$.

20. (♣) Iz kroga z danim polmerom R izrežemo izsek in preostanek zvijemo v stožec. Izberite kot izseka tako, da ima dobljeni stožec največjo možno prostornino.

    Veljata zvezi $R^2 = v^2 + r^2$, kjer sta r in v polmer in višina stožca, ter $(2\pi - \alpha)R = 2\pi r$, kjer je α kot izseka. Sledi $v = \sqrt{R^2 - r^2}$ in $r = \frac{(2\pi-\alpha)R}{2\pi}$. Prostornino stožca izračunamo po formuli $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$, ki jo zapišemo kot funkcijo kota α

    $$V(\alpha) = \frac{R^3}{24\pi^3}(2\pi - \alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}.$$

    Odvajamo in dobimo

    $$\begin{aligned}V'(\alpha) &= \frac{R^3}{24\pi^3}\left(-2(2\pi-\alpha)\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2} + (2\pi - \alpha)^2\frac{1}{2\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}}(4\pi - 2\alpha)\right)\\ &= \frac{R^3(2\pi - \alpha)}{24\pi^3} \cdot \frac{-8\pi\alpha + 2\alpha^2 + 4\pi^2 - 4\pi\alpha + \alpha^2}{\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}}\\ &= \frac{R^3(2\pi - \alpha)(4\pi^2 - 12\pi\alpha + 3\alpha^2)}{24\pi^3\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}}.\end{aligned}$$

    Odvod je enak 0, ko je $\alpha_1 = 2\pi$ in ko je $\alpha_{2,3} = 2\pi \pm \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$. Prostornina je največja pri kotu $\alpha = 2\pi(1 - \frac{\sqrt{6}}{3})$.

21. Čimbolj natančno narišite grafe naslednjih funkcij.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$

To je polinomska funkcija. Začetna vrednost je v točki $f(0) = 7$. Ničle izračunamo z uporabo Hornerjevega algoritma: $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 = (x-1)^2(2x+7) = 0$. Dobimo dvojno ničlo pri $x_{1,2} = 1$ in enojno pri $x_3 = -\frac{7}{2}$.
Odvajamo in dobimo $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1) = 0$. Stacionarni točki sta $x_1 = -2$ in $x_2 = 1$. Drugi odvod je $f''(x) = 12x + 6$. Ker je $f''(-2) < 0$, imamo v tej točki lokalni maksimum, ker je $f''(1) > 0$ imamo v tej točki lokalni minimum. Prevoje dobimo tam, kjer je $f''(x) = 0$, to je v točki $x = -\frac{1}{2}$.

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

To je polinomska funkcija. Uvedemo novo spremenljivko $t = x^2$. Funkcijo razstavimo $t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1) = 0$ in dobimo ničli $t_1 = 3$ in $t_2 = -1$. Iz enačbe $x^2 = 3$, dobimo rešitvi $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, enačba $x^2 = -1$ pa nima realnih rešitev.
Odvajamo in dobimo $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1) = 0$. Stacionarne točke so $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ in $x_3 = -1$. Drugi odvod je $f''(x) = 12x^2 - 4$. Ker je $f''(0) < 0$, imamo v tej točki lokalni maksimum, v ostalih dveh stacionarnih točkah pa lokalni minimum, saj je $f''(\pm 1) > 0$.

c) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

To je racionalna funkcija. Ničla: $x = 0$. Pola: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Vodoravna asimptota: $y = 0$. Odvod je

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} > 0.$$

Odvod je povsod strogo pozitiven. To pomeni, da stacionarnih točk ni, torej tudi ne ekstremov, funkcija pa je povsod strogo naraščajoča.

d) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

To je racionalna funkcija. Ničla: $x = 0$. Polov ni. Vodoravna asimptota: $y = 0$. Odvod je

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Odvod je enak 0 v točkah $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$. Ker je $f'(-2) < 0$, $f'(0) > 0$ in $f'(2) < 0$, je v točki $x_1 = -1$ lokalni minimum, v točki $x_2 = 1$ pa lokalni maksimum. Velja še $f(-1) = -1$ in $f(1) = 1$. Funkcija narašča na intervalu $(-1, 1)$ in pada na uniji intervalov $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

e) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x+2}$

To je racionalna funkcija $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+2}$. Ničle: $x_1 = 2$ in $x_2 = -1$. Pol: $x = -2$. Poševna asimptota: $y = x - 3$ (delimo polinoma in velja $x^2 - x - 2 = (x-3)(x+2) + 4$). Začetna vrednost: $f(0) = -1$. Odvod je

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+2) - (x^2-x-2)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}.$$

Odvod je enak 0 v točkah $x_1 = -4$ in $x_2 = 0$. Ker je $f'(-5) > 0$ in $f'(-3) < 0$, je v točki $x_1 = -4$ lokalni maksimum. Ker je $f'(-1) < 0$ in $f'(1) > 0$, je v točki $x_2 = 0$ lokalni minimum.

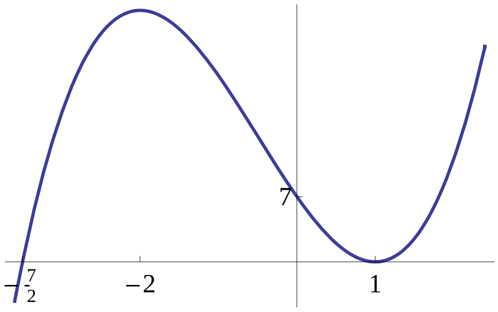
f) $f(x) = \frac{1+x^3}{x-x^2}$

To je racionalna funkcija. Ničla: $x = -1$. Pola: $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$. Poševna asimptota:

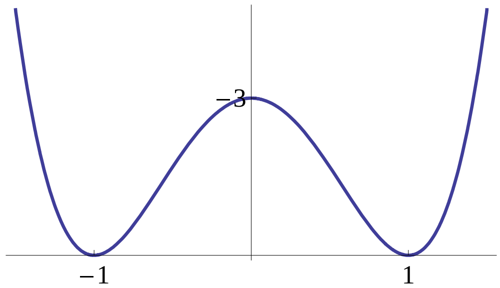
$y = -x - 1$ (delimo polinoma in velja $x^3 + 1 = x(1-x)(-x-1) + x + 1$). Asimptoto sekamo v točki $x = -1$. Odvod je

$$f'(x) = \frac{3x^2(x - x^2) - (1 + x^3)(1 - 2x)}{(x - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 2x^3 + 2x - 1}{x^2(1 - x)^2}.$$

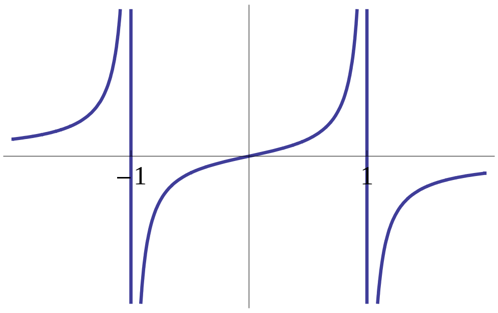
Odvod je enak 0 približno za vrednosti $x_1 \approx 0.44$ in $x_2 \approx 2.30$. V prvi točki je lokalni minimum, v drugi pa lokalni maksimum.



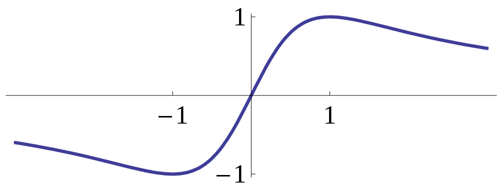
a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$



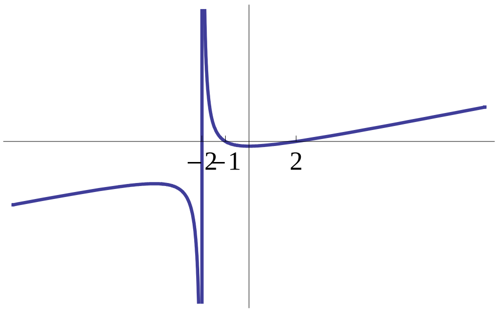
b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$



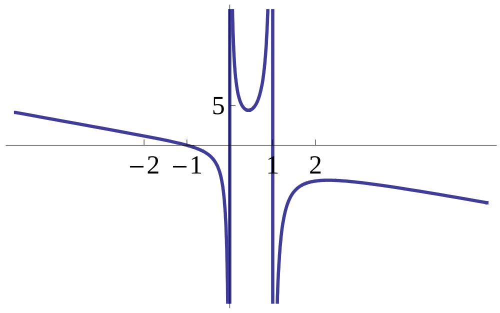
c) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$



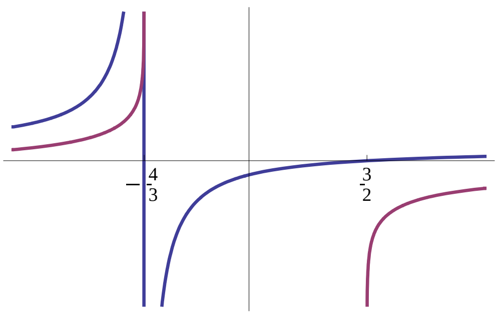
d) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$



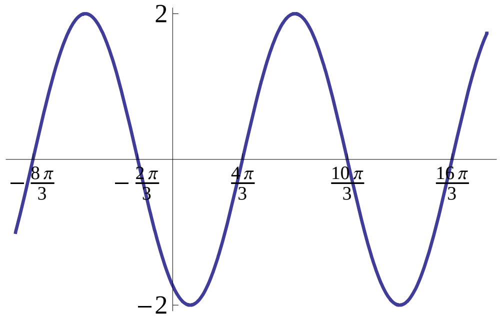
e) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x+2}$



f) $f(x) = \frac{1+x^3}{x-x^2}$



g) $f(x) = \log\frac{2x-3}{3x+4}$



h) $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)$

g) $f(x) = \log\frac{2x-3}{3x+4}$

To je logaritem racionalne funkcije. Najprej narišemo racionalno funkcijo $g(x) = \frac{2x-3}{3x+4}$. Ničla: $x = \frac{3}{2}$. Pol: $x = -\frac{4}{3}$. Vodoravna asimptota: $y = \frac{2}{3}$. Začetna vrednost: $(0, -\frac{3}{4})$. Ker je odvod

$$g'(x) = \frac{2(3x+4) - 3(2x-3)}{(3x+4)^2} = \frac{17}{(3x+4)^2} \neq 0,$$

ekstremov ni. Uporabimo lastnosti logaritemske funkcije ($\log 1 = 0$, $\lim_{x\to\infty} = \infty$, logaritem je definiran le za pozitivne vrednosti) in narišemo prvotno funkcijo $f(x)$.

h) $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)$

Funkcija sinus ima ničle tam, kjer je argument celoštevilski večkratnik števila π

$$\begin{aligned} \tfrac{x}{2} - \tfrac{2\pi}{3} &= k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}, \\ x_k &= \tfrac{4\pi}{3} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Prvih nekaj ničel je $x_{-1} = -\frac{2\pi}{3}$, $x_0 = \frac{4\pi}{3}$, $x_1 = \frac{10\pi}{3}$.
Maksimumi funkcije sinus so

$$\begin{aligned} \tfrac{x}{2} - \tfrac{2\pi}{3} &= \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}, \\ x_k &= \tfrac{7\pi}{3} + 4k\pi. \end{aligned}$$

Prvih nekaj maksimumov je $x_{-1} = -\frac{5\pi}{3}$, $x_0 = \frac{7\pi}{3}$.
Minimumi funkcije sinus so

$$\begin{aligned} \tfrac{x}{2} - \tfrac{2\pi}{3} &= -\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}, \\ x_k &= \tfrac{\pi}{3} + 4k\pi. \end{aligned}$$

Prvi minimum je $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

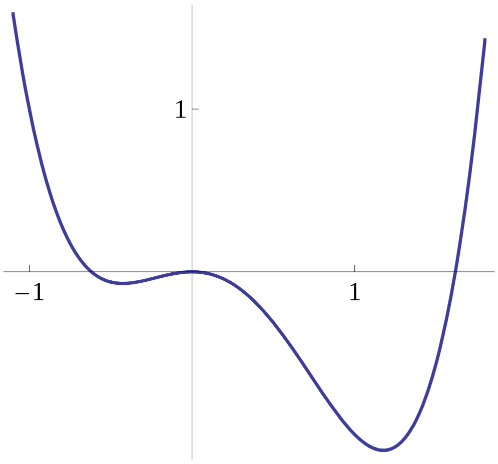
22. Čimbolj natančno narišite grafe naslednjih funkcij.

a) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2$

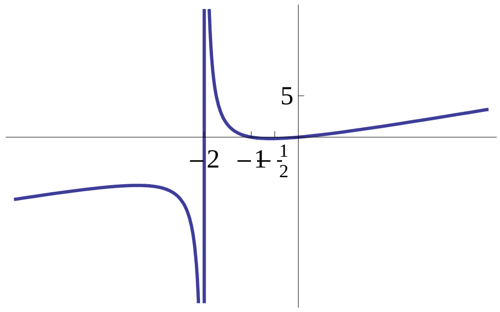
b) $f(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$

c) $f(x) = x^3 e^{-x}$

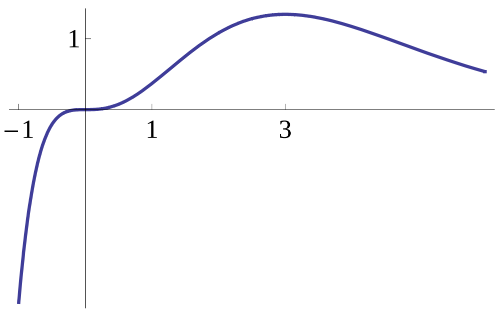
d) $f(x) = \ln \frac{|3x|}{1+x^2}$



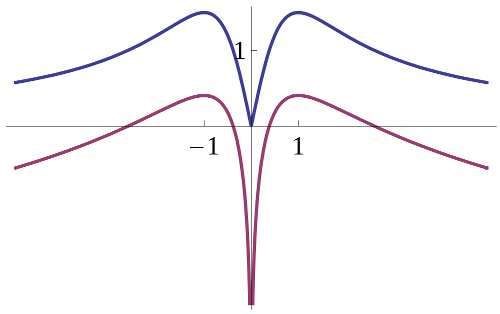
a) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2$



b) $f(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$



c) $f(x) = x^3 e^{-x}$



d) $f(x) = \ln \frac{|3x|}{1+x^2}$

INTEGRALI

NEDOLOČENI INTEGRALI

Pravila za integriranje:

$$
\begin{aligned}
\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x \\
\int (C \cdot f(x))\,\mathrm{d}x &= C \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad (C = \text{konst.}) \\
\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) &= u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x) \quad (\text{per partes}) \\
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \quad (\text{uvedba nove spremenljivke}) \\
& \quad (x = g(t), \quad \mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t)
\end{aligned}
$$

Tabela elementarnih integralov: $(a \in \mathbb{R},\ C = \text{konst.})$

$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$	$\int \mathrm{sh}x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$	$\int \mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$

Integrale z $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2-1}$ in $\sqrt{x^2+1}$ izračunamo s trigonometričnimi substitucijami

$$
\begin{aligned}
R(x, \sqrt{1-x^2}) &\Rightarrow x = \sin t \text{ ali } x = \cos t, \\
R(x, \sqrt{x^2+1}) &\Rightarrow x = \mathrm{tg}t \text{ ali } x = \mathrm{sh}t, \\
R(x, \sqrt{x^2-1}) &\Rightarrow x = \frac{1}{\cos t}.
\end{aligned}
$$

1. S pomočjo tabele elementarnih integralov izračunajte naslednje integrale.

a) $\displaystyle\int (1-x^2)(1-x)\,\mathrm{d}x = \int (1 - x - x^2 + x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$

b) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

c) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \mathrm{tg}x - x + C$

Upoštevamo zvezi $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ in $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

d) $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x + \mathrm{arctg}x + C$

V prvem koraku delimo polinoma in dobimo $x^4 = (x^2+1)(x^2-1) + 1$.

e) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = x + 2\mathrm{arctg}x + C$

f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C$

2. Izračunajte naslednje integrale z uvedbo nove spremenljivke.

a) $\displaystyle\int \frac{x}{3x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\int\left(1-\frac{2}{t}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{9}\left(t-2\ln|t|\right) = \frac{1}{9}\left(3x+2-2\ln|3x+2|\right)+C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = 3x+2$ z diferencialom $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$, oz. $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}$.

b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}t^{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = 1-3x$ z diferencialom $\mathrm{d}t = -3\,\mathrm{d}x$, oz. $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{3}$.

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{5}t^{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = 2-5x$.

d) $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^{-2x}+3\mathrm{e}^{3x}\right)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x + 3\int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{3x}+C$

Uvedemo novi spremenljivki $t = -2x$ in $u = 3x$.

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{arctg}t = \mathrm{arctg}\mathrm{e}^x + C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = \mathrm{e}^x$ z diferencialom $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

f) $\displaystyle\int \mathrm{tg}x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|+C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = \cos x$ z diferencialom $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$.

g) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int e^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\sin x}+C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = \sin x$.

h) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = -\int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = -2\sqrt{t} = -2\sqrt{1+\cos x}+C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = 1+\cos x$.

i) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} = \frac{\ln^3 x}{3}+C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = \ln x$ z diferencialom $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

j) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|\ln x|+C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = \ln x$.

k) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|\ln(\ln x)|+C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = \ln(\ln x)$.

l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int 2t\,\mathrm{d}t = t^2 = \mathrm{arctg}^2\sqrt{x}+C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = \mathrm{arctg}\sqrt{x}$.

m) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-(1+x)^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}+C$

Uvedemo novo spremenljivko $t = 1+x$.

n) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int (t^4-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} = \frac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + C$

Uvedemo novo spremenljivko $t^2 = 1-x^2$ z diferencialom $2t\,\mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x$.

o)

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1-\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(t-\sin t) = \frac{1}{4}(2x-\sin 2x)+C \\ \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1+\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(t+\sin t) = \frac{1}{4}(2x+\sin 2x)+C\end{aligned}$$

Uporabimo formuli za polovične kote $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ in $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, ter uvedemo novo spremenljivko $t = 2x$.

3. S pomočjo integracije po delih (per partes) izračunajte naslednje integrale.

a)

$$\begin{aligned}\int x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &\quad (u=x^3, \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}u=3x^2\,\mathrm{d}x, v=\mathrm{e}^x) \\ &= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &\quad (u=x^2, \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x, v=\mathrm{e}^x) \\ &= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6x\mathrm{e}^x - 6\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &\quad (u=x, \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}u=\,\mathrm{d}x, v=\mathrm{e}^x) \\ &= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6x\mathrm{e}^x - 6\mathrm{e}^x + C\end{aligned}$$

Integracijo per partes smo uporabili trikrat.

b)

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x &= x^2\sin x - 2\int x\sin x\,\mathrm{d}x \\ &\quad (u=x^2, \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x, v=\sin x) \\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,\mathrm{d}x \\ &\quad (u=x, \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}u=\,\mathrm{d}x, v=-\cos x) \\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C\end{aligned}$$

Integracijo per partes smo uporabili dvakrat.

c)

$$\begin{aligned}\int x\ln(x-1)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &\quad \left(u=\ln(x-1), \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x-1}, v=\frac{x^2}{2}\right) \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x-1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int \ln x\,\mathrm{d}x &= x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C \\ &\quad \left(u=\ln x, \mathrm{d}v=\mathrm{d}x, \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}, v=x\right)\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,\mathrm{d}x &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &\quad\left(u=\arcsin x, \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, v = x\right)\\ &= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\\ &\quad\left(t = 1-x^2, \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

f) (♣) $I = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x, \quad a,b\in\mathbb{R}$

Integral izračunamo z dvakratno uporabo integracije po delih.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Prvi enačaj: $u=\cos bx$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = -b\sin bx\,\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$. Drugi enačaj: $u=\sin bx$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = b\cos bx\,\mathrm{d}x$, $v=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$. Rešimo enačbo

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I,\\ I &= \frac{\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\sin bx}{1+\frac{b^2}{a^2}} + C.\end{aligned}$$

4. Izračunajte naslednje integrale racionalnih funkcij.

a)

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-2} &= \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-2} - \frac{\frac{1}{3}}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}\\ &= \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

Ulomek razstavimo na parcialne ulomke

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A - 2B}{x^2-x-2}.$$

Dobimo sistem enačb $A+B=0$, $A-2B=1$, ki ima rešitev $A=\frac{1}{3}$ in $B=-\frac{1}{3}$.

b)

$$\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}\right)\mathrm{d}x = \ln|x-2| + \ln|x+5| + C$$

Ulomek razstavimo na parcialne ulomke

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{(A+B)x + 5A - 2B}{(x-2)(x+5)}.$$

Dobimo sistem enačb $A+B=2$, $5A-2B=3$, ki ima rešitev $A=1$ in $B=1$.

c)

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1} + 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2} - \frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+3}\\ &= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C\end{aligned}$$

Ulomek razstavimo na parcialne ulomke

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}\\ &= \frac{(A+B+C)x^2+(5A+4B+3C)x+6A+3B+2C}{(x+1)(x+2)(x+3)}.\end{aligned}$$

Dobimo sistem enačb $A+B+C=0$, $5A+4B+3C=1$, $6A+3B+2C=0$, ki ima rešitev $A=-\frac{1}{2}$, $B=2$ in $C=-\frac{3}{2}$.

d)

$$\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}x - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$$

Ulomek razstavimo na parcialne ulomke

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} &= \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}\\ &= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+2B+D}{(x^2+1)(x^2+2)}\end{aligned}$$

Dobimo sistem enačb $A+C=0$, $B+D=0$, $2A+C=0$, $2B+D=1$, ki ima rešitev $A=0$, $C=0$, $B=1$ in $D=-1$.

e)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+2}+\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2}\\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+2|+\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C\end{aligned}$$

Ulomek razstavimo na parcialne ulomke

$$\frac{1}{x^3+x^2+2x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}=\frac{(A+B)x^2+(B+C)x+2A+C}{x^3+x^2+2x+2}.$$

Dobimo sistem enačb $A+B=0$, $B+C=0$, $2A+C=1$, ki ima rešitev $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$ in $C=\frac{1}{3}$.
Integral $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+2}$ izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t=x^2+2$, $\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$ in dobimo

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|=\frac{1}{2}\ln|x^2+2|.$$

f) $\int\frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

Integral izračunamo z nastavkom za rešitev, ki ima za linearni faktor en logaritem, za kvadratni faktor pa en logaritem in en arcus tangens

$$\begin{aligned}\int\frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{x+2}{x(x^2-2x+2)}\,\mathrm{d}x\\ &= A\ln|x|+B\ln|x^2-2x+2|+C\mathrm{arctg}(x-1).\end{aligned}$$

Nastavek odvajamo

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x(x^2-2x+2)} &= \frac{A}{x}+\frac{B(2x-2)}{x^2-2x+2}+\frac{C}{1+(x-1)^2}\\ &= \frac{(A+2B)x^2+(-2A-2B+C)x+2A}{x(x^2-2x+2)}.\end{aligned}$$

Dobimo sistem enačb $A+2B=0$, $-2A-2B+C=1$, $2A=2$, ki ima rešitev $A=1$, $B=-\frac{1}{2}$ in $C=2$. Sledi

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + 2\mathrm{arctg}(x-1) + K.$$

g) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x$

Integral izračunamo z nastavkom za rešitev, ki ima dva logaritemska člena, za vsak linearni faktor po enega, prvi člen pa ustreza drugi potenci prvega faktorja

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{x+1} + B\ln|x+1| + C\ln|x-1|.$$

Nastavek odvajamo

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{-A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{(B+C)x^2+(2C-A)x+A-B+C}{(x+1)^2(x-1)}.$$

Dobimo sistem enačb $B+C=1$, $2C-A=0$, $A-B+C=1$, ki ima rešitev $A=1$, $B=\frac{1}{2}$ in $C=\frac{1}{2}$. Sledi

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + K.$$

5. (♣) Izračunajte integral iracionalne funkcije

$$\int \sqrt{3+2x-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Integral izračunamo z nastavkom oblike

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Zapišemo nastavek

$$\int \sqrt{3+2x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3+2x-x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = (Ax+B)\sqrt{3+2x-x^2} + \int \frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

in odvajamo

$$\begin{aligned}\frac{3+2x-x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}} &= A\sqrt{3+2x-x^2} + (Ax+B)\frac{2-2x}{\sqrt{3+2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{3+2x-x^2}}\\ &= \frac{-2Ax^2+(3A-B)x+3A+B+\lambda}{\sqrt{3+2x-x^2}}.\end{aligned}$$

Iz primerjave koeficientov dobimo sistem enačb $-2A=-1$, $3A-B=2$ in $3A+B+\lambda=3$, ki ima rešitev $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$ in $\lambda=2$. Sledi

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3+2x-x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3+2x-x^2} + \int \frac{2\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}}\\ &= \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3+2x-x^2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(1-x)^2}}\\ &= \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{3+2x-x^2} - 2\arcsin\frac{1-x}{2} + K.\end{aligned}$$

Newton-Leibnitzova formula:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \qquad F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. Izračunajte naslednje določene integrale.

a) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=1}^4 = \frac{14}{3}$

b) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(x^2 + x^{-4}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^{-3}}{-3}\right)\Big|_{x=1}^2 = \frac{21}{8}$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Substitucija: $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$. Nove meje: $x = 0 \Rightarrow t = 1$ in $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\cos t\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}$

Substitucija: $t = 4x$, $\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x$. Nove meje: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ in $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \pi$.

e) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x}} = \int_0^4 t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = 2t^{\frac{1}{2}}\Big|_0^4 = 4$

Substitucija: $t = 4 - x$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Nove meje: $x = 0 \Rightarrow t = 4$ in $x = 4 \Rightarrow t = 0$.

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^{-3}\,\mathrm{d}t = -t^{-2}\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = 1$

Substitucija: $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$. Nove meje: $x = 0 \Rightarrow t = 1$ in $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Upoštevamo pravilo $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

g)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 5} \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}{1 + 3\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}{\mathrm{e}^x + 3}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left(2t - 4\mathrm{arctg}\frac{t}{2}\right)\Big|_0^2 = 4 - \pi
\end{aligned}$$

Substitucija: $t^2 = \mathrm{e}^x - 1$, $2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Meje: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ in $x = \ln 5 \Rightarrow t = 2$.

h) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^3\underbrace{\ln \mathrm{e}}_{=1} - \frac{1}{3}\underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{2\mathrm{e}^3+1}{9}$

Integral izračunamo po formuli per partes

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u,$$

kjer vzamemo $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $v = \frac{x^3}{3}$.

i) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$ Integral izračunamo per partes, kjer vzamemo $u = x$, $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = \cos x$.

j)

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} x^2 \sin x \,\mathrm{d}x &= -x^2 \cos x\Big|_{-2}^{2} + 2\int_{-2}^{2} x\cos x \,\mathrm{d}x \\
&= -4\cos 2 + 4\cos 2 + 2x\sin x\Big|_{-2}^{2} - 2\int_{-2}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= 4\sin 2 - 4\sin 2 + 2\cos x\Big|_{-2}^{2} \\
&= 2\cos 2 - 2\cos 2 = 0
\end{aligned}$$

Integral izračunamo dvakrat per partes, kjer najprej vzamemo $u = x^2$, $\mathrm{d}v = \sin x \,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, $v = -\cos x$, nato pa $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = \sin x$. Opazimo še, da je integral lihe funkcije na simetričnem intervalu enak 0.

k) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_1^3 = \ln\frac{3}{2}$

Ulomek razstavimo na parcialne ulomke $\dfrac{1}{x+x^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{(A+B)x + A}{x(x+1)}$. Dobimo sistem enačb $A + B = 0$, $A = 1$, ki ima rešitev $A = 1$ in $B = -1$.

l) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \int_0^\infty \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\arctan t\Big|_0^\infty = \pi$

Substitucija: $t = \sqrt{x-1}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x-1}}$. Meje: $x = 1 \Rightarrow t = 0$ in $x = \infty \Rightarrow t = \infty$.

m) (♣) $\displaystyle I = \int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

Najprej izračunamo nedoločeni integral

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\mathrm{tg}^2 t \cdot \frac{1}{\cos t}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int u^{-2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\sin t} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Uporabimo dve substituciji $x = \mathrm{tg}t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t}$ in $u = \sin t$, $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Opazimo zvezo $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Vstavimo meje

$$I = \left(-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)\Bigg|_1^2 = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

7. Izračunajte nepravi integral $\displaystyle I = \int_1^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$.

Najprej izračunamo nedoločeni integral kot integral racionalne funkcije

$$\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + K.$$

Ulomek razstavimo na parcialne ulomke

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3} = \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (3A+C)x + 3B + D}{(x^2+1)(x^2+3)}.$$

Dobimo sistem enačb $A + C = 0$, $B + D = 0$, $3A + C = 0$, $3B + D = 1$, ki ima rešitev $A = 0$, $C = 0$, $B = \frac{1}{2}$ in $D = -\frac{1}{2}$. Vstavimo meje in dobimo

$$I = \left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_1^\infty = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

UPORABA INTEGRALOV

Ploščina lika, ki je omejen s krivuljo $y = f(x)$ ter premicami $y = 0$, $x = a$ in $x = b$

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ploščina lika, ki je omejen s krivuljama $y = f(x)$ in $y = g(x)$, kjer sta a in b abscisi presečišč

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Dolžina loka krivulje $y = f(x)$ med točkama a in b

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x.$$

Prostornina rotacijskega telesa (vrtenine), ki nastane, če krivuljo $y = f(x)$ med točkama a in b zavrtimo okrog x osi

$$V = \pi \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x.$$

Površina rotacijskega telesa (vrtenine), ki nastane, če krivuljo $y = f(x)$ med točkama a in b zavrtimo okrog x osi

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Izračunajte integral $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$, kjer je $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \le 1, \\ 1 - |x|, & |x| > 1 \end{cases}$.

   Ker je funkcija f podana z različnimi predpisi na različnih podintervalih, integral izračunamo tako, da seštejemo integrale na posameznih podintervalih

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{-1} (1 + x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (1 - x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2. Izračunajte ploščino lika, ki je omejen s krivuljo $y = \frac{6}{5-4x-x^2}$ in premicami $x = 2$, $x = 3$ ter abscisno osjo.

   Ploščina je integral racionalne funkcije, ki ga izračunamo z uporabo parcialnih ulomkov

$$\frac{-6}{5 - 4x - x^2} = \frac{6}{x^2 + 4x - 5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} = \frac{(A+B)x + 5A - B}{x^2 + 4x - 5}.$$

   Dobimo sistem enačb $A + B = 0$ in $5A - B = 6$, ki ima rešitev $A = 1$ in $B = -1$. Ker je krivulja pod x-osjo sledi

$$\begin{aligned}S &= -\int_2^3 \frac{6}{5 - 4x - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5}\right)\mathrm{d}x \\ &= (\ln|x-1| - \ln|x+5|)\Big|_2^3 = \ln\frac{7}{4}.\end{aligned}$$

3. Izračunajte ploščino lika med grafom funkcije $f(x) = \sin x + \cos x + x$, abscisno osjo ter premicama $x = 0$ in $x = \pi$.

   Ploščina lika je integral

$$S = \int_0^\pi (\sin x + \cos x + x)\,\mathrm{d}x = \left(-\cos x + \sin x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = 2 + \frac{\pi^2}{2}.$$

4. (♣) Izračunajte ploščino lika, ki je omejen s krivuljami $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$ in $y = 0$.

   Območje razdelimo na dva dela in izračunamo ploščino vsakega dela posebej. Parabola $y = (x+1)^2$ se dotakne abscisne osi v točki $x = -1$ in se seka s krivuljo $x = \sin \pi y$ v točki $(0,1)$, zato je ploščina prvega dela enaka

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \, dx = \int_{-1}^{0} (x^2+2x+1) \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}.$$

   Krivulja $x = \sin \pi y$ seka ordinatno os v točkah $y = 0$ in $y = 1$, zato je ploščina drugega dela enaka

$$S_2 = \int_0^1 \sin \pi y dy = -\frac{1}{\pi} \cos \pi y \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

   Pozor! Tu integriramo po spremenljivki y. Ploščina celotnega območja je

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi + 6}{3\pi}.$$

5. Izračunajte ploščino lika, ki je omejen s krivuljami $y = x^2 - 1$, $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ in $y = -2x + 2$.

   Območje razdelimo na tri dele in izračunamo ploščino vsakega dela posebej. Premici se sekata v točki z absciso $x = \frac{1}{2}$, prva premica se seka s parabolo v točkah z abscisama $x = -1$ in $x = \frac{5}{3}$, druga premica pa v točkah z abscisama $x = -3$ in $x = 1$. Presečišča nam dajo integracijske meje

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \right) dx = \frac{3}{4}, \\
S_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-2x+2) \, dx = \frac{1}{4}, \\
S_3 &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1 \right) dx = \frac{4}{3}, \\
S &= S_1 + S_2 + S_3 = \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

6. Izračunajte dolžino loka krivulje $y^2 = x^3$ med presečiščema s premico $2y = x$.

   Najprej izračunajmo presečišča. Ker je $x = 2y$, je $x^3 = 8y^3$ in dobimo enačbo $y^2 = 8y^3$, oz. $y^2(8y-1)$, ki ima rešitve $y_{1,2} = 0$ in $y_3 = \frac{1}{8}$. To nam da $x_{1,2} = 0$ in $x_3 = \frac{1}{4}$. Presečišči sta točki $T_1(0,0)$ in $T_2(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$. Dolžino loka izračunamo po zgornji formuli. Ker je $y = x^{\frac{3}{2}}$, je $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ in

$$s = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx = \frac{4}{9} \int_1^{\frac{25}{16}} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{4}{9} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^{\frac{25}{16}} = \frac{61}{216}.$$

   Nova spremenljivka: $t = 1 + \frac{9}{4}x$, $dt = \frac{9}{4}\,dx$. Ko je $x = 0$, je $t = 1$, in ko je $x = \frac{1}{4}$, je $t = \frac{25}{16}$.

7. Izračunajte dolžino loka krivulje $y = \ln(1 - x^2)$ za $0 < x < \frac{1}{2}$.

   Odvod krivulje je $y' = \frac{-2x}{1-x^2}$. Sledi

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{2}{1-x^2}.$$

   Zadnji ulomek razstavimo na parcialne ulomke

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{(A-B)x + A + B}{1-x^2},$$

kjer je rešitev sistema enačb $A - B = 0$ in $A + B = 2$ enaka $A = B = 1$. Dolžina loka

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(-x - \ln|x-1| + \ln|x+1|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln 3 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

8. Izračunajte dolžino loka krivulje $y = \mathrm{ch}x$ za $-1 < x < 1$.

   Odvod krivulje je $y' = \mathrm{sh}x$. Velja zveza $\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$. Sledi

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{\mathrm{ch}^2x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x\Big|_{-1}^{1} = 2\mathrm{sh}1 = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

9. Izračunajte prostornino telesa, ki nastane, če krivuljo $y = 3\sqrt{x(1-x)^3}$, $0 < x < 1$, zavrtimo okrog x osi.

   Prostornino izračunamo po zgornji formuli

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(3\sqrt{x(1-x)^3}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 9x(1-x)^3\,\mathrm{d}x \\ &= 9\pi \int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)\,\mathrm{d}x = 9\pi \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{9\pi}{20}. \end{aligned}$$

10. Izračunajte prostornino telesa, ki nastane, če krivuljo $y = \mathrm{e}^{-x}$, $0 < x < 3$, zavrtimo okrog x osi.

    Prostornina je

$$V = \pi \int_0^3 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^3 = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-6})\pi}{2}.$$

11. Izračunajte prostornino telesa, ki nastane, če krivuljo $y = \sqrt{x \sin x}$, $0 < x < \pi$, zavrtimo okrog x osi.

    Upoštevamo rezultat ene prejšnjih nalog. Prostornina je

$$V = \pi \underbrace{\int_0^\pi x \sin x\,\mathrm{d}x}_{=\pi} = \pi^2.$$

12. Izračunajte prostornino in površino telesa, ki nastane, če krivuljo $y = \sqrt{1-x^2}$, $0 < x < 1$, zavrtimo okrog x osi.

    Prostornina rotacijskega telesa je

$$V = \pi \int_0^1 (1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

    Odvod krivulje je $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, od koder sledi

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

    Površina rotacijskega telesa je

$$P = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}x = 2\pi x\Big|_0^1 = 2\pi.$$

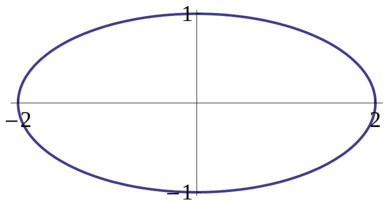
KRIVULJE V POLARNI IN PARAMETRIČNI OBLIKI

	Polarne koordinate $r = r(\varphi)$	**Parametrična oblika** $x = x(t)$, $y = y(t)$
Ploščina zanke	$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,\mathrm{d}\varphi$	$S = \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}t$
Dolžina loka	$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2}\,\mathrm{d}\varphi$	$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$
Prostornina vrtenine	$V = \pi\int_\alpha^\beta r^2\,\mathrm{d}\varphi$	$V = \pi\int_a^b y^2\dot{x}\,\mathrm{d}t$
Površina vrtenine	$P = 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{(r')^2 + r^2}\,\mathrm{d}\varphi$	$P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$

Vrtenina $\equiv$ rotacijsko telo.

1. Izračunajte ploščino zanke $x = 2\cos t$, $y = \sin t$.

   Krivulja je podana v parametrični obliki. Narišemo jo tako, da za vsako vrednost parametra t izračunamo koordinati x in y. Dobimo elipso z glavnima polosema $a = 2$ in $b = 1$.

   Slika 6: Graf krivulje $x = 2\cos t$, $y = \sin t$: elipsa.

   Uporabimo zgornjo formulo. Ker je $x(t) = 2\cos t$, je $\dot{x}(t) = -2\sin t$ in ker je $y(t) = \sin t$, je $\dot{y}(t) = \cos t$. Ploščina je

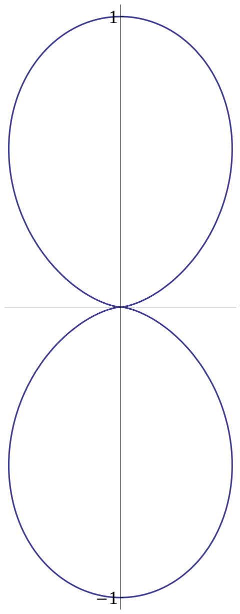
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\cos^2 t + 2\sin^2 t\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\underbrace{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}_{=1}\,\mathrm{d}t = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

2. Izračunajte ploščino območja $r = \sin^2\varphi$, $0 < \varphi < \pi$.

   Krivulja je podana v polarnih koordinatah. Narišemo jo tako, da pri posameznih kotih določimo polmer. Za kote $\varphi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ dobimo polmere $r = 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1$. Tako nadaljujemo še za ostale kote od 0 do 2π in dobimo dvojno zanko - osmico (glej sliko). Ker računamo ploščino le za $0 < \varphi < \pi$, je to le ploščina zgornje zanke. Uporabimo zgornjo formulo in dobimo

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\varphi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\left(\underbrace{-\cos\varphi\sin^3\varphi\Big|_0^\pi}_{=0} + 3\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right) \\ &= \frac{3}{2}\int_0^\pi \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{8}\int_0^\pi \frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{16}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^\pi = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

   V drugem koraku integriramo po delih: $u = \sin^3\varphi$, $\mathrm{d}v = \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}u = 3\sin^2\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, $v = -\cos\varphi$. V tretjem koraku upoštevamo formulo za sinus polovičnega kota $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$.



Slika 7: Graf krivulje $r = \sin^2\varphi$, $0 < \varphi < \pi$: lemniskata.

3. Izračunajte dolžino loka krivulje $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$, $y > 0$.

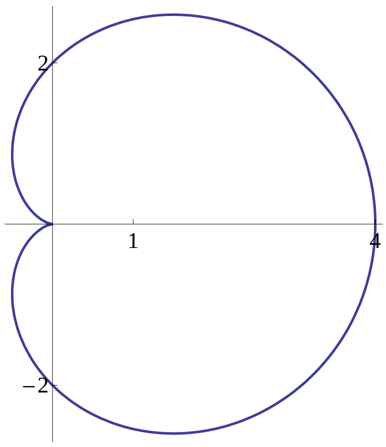
   Ker mora biti $y > 0$, je $2 - \frac{t^4}{4} > 0$ in zato $t < \sqrt[4]{8}$. Ker je $x(t) = \frac{t^6}{6}$, je $\dot{x}(t) = t^5$ in zato $\dot{x}^2(t) = t^{10}$. Ker je $y(t) = 2 - \frac{t^4}{4}$, je $\dot{y}(t) = t^3$ in zato $\dot{y}^2(t) = t^6$. Dolžino loka izračunamo po zgornji formuli in dobimo

   $$s = \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^{10} + t^6}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3\sqrt{t^4 + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^9 u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{13}{3}.$$

   V drugi vrstici uporabimo substitucijo $u = t^4 + 1$ z diferencialom $\mathrm{d}u = 4t^3\,\mathrm{d}t$. Ko je $t = 0$, je $u = 1$ in ko je $t = \sqrt[4]{8}$, je $u = 9$.

4. Izračunajte dolžino zanke $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$.

   Krivulja je sklenjena (slika za $a = 2$).



Slika 8: Graf krivulje $r = 2(1 + \cos\varphi)$: kardioida.

Ker je $r = a(1 + \cos\varphi)$, je $r' = -a\sin\varphi$, $r^2 = a^2(1 + \cos\varphi)^2$ in $(r')^2 = a^2\sin^2\varphi$. Dolžino zanke izračunamo po zgornji formuli. Zanka se zaključi, ko φ preteče vse kote od 0 do 2π. Ker sta zgornji in spodnji del zanke enaka, lahko integriramo samo od 0 do π in množimo z 2

$$\begin{aligned} s &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{=1}+1+2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,\mathrm{d}\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

V tretjem koraku upoštevamo formulo za kosinus polovičnega kota $1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

5. Izračunajte prostornino in površino telesa, ki nastane, če krivuljo $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$, zavrtimo okrog osi x.

   Prostornino izračunamo po zgornji formuli in dobimo

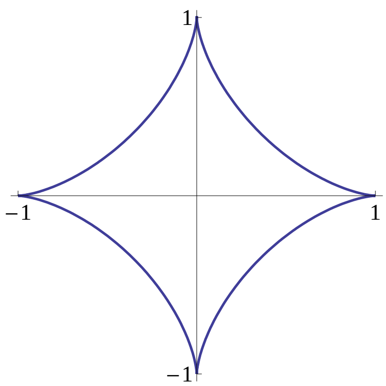
$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2\mathrm{d}\varphi = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}.$$

   Površino izračunamo po zgornji formuli. Ker je $r' = -\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi}}$ in $\sqrt{r^2+(r')^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, sledi

$$P = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -2\pi\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi(2-\sqrt{2}).$$

6. (♣) Izračunajte prostornino in površino telesa, ki nastane, če zavrtimo astroido $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$ okrog osi x.

   Astroida je narisana za $a = 1$.



Slika 9: Graf krivulje $x = \sin^3 t$, $y = \cos^3 t$: astroida.

Ker je $x(t) = a\sin^3 t$ in $y(t) = a\cos^3 t$, je $\dot{x}(t) = 3a\sin^2 t\cos t$ in $\dot{y}(t) = -3a\cos^2 t\sin t$. Prostornino rotacijskega telesa izračunamo po zgornji formuli in dobimo

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\pi} a^2\cos^6 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t = 2\cdot 3\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)^3\sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-u^2)^3u^2\,\mathrm{d}u = 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(u^2-3u^4+3u^6-u^8\right)\mathrm{d}u \\ &= 6\pi a^3\left(\frac{u^3}{3}-\frac{3u^5}{5}+\frac{3u^7}{7}-\frac{u^9}{9}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{32\pi a^3}{105}. \end{aligned}$$

V drugi vrstici uporabimo enakost $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ in simetrijo astroide, v tretji vrstici pa substitucijo $u = \sin t$ z diferencialom $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ko je $t = 0$, je $u = 0$ in ko je $t = \frac{\pi}{2}$, je $u = 1$.

Površino rotacijskega telesa izračunamo po zgornji formuli. Ker je

$$\begin{aligned}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} &= \sqrt{9a^2\sin^4 t\cos^2 t + 9a^2\sin^2 t\cos^4 t}\\ &= \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t\,\underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{=1}} = 3a\sin t\cos t,\end{aligned}$$

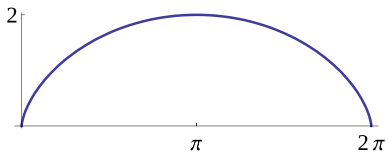
sledi

$$\begin{aligned}P &= 2\pi\int_0^\pi a\cos^3 t\cdot 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = 6\pi a^2\int_0^\pi \cos^4 t\sin t\,\mathrm{d}t\\ &= 6\pi a^2\int_1^{-1}(-u^4)\,\mathrm{d}u = 6\pi a^2\frac{u^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{12\pi a^2}{5}.\end{aligned}$$

V drugi vrstici uporabimo substitucijo $u=\cos t$ z diferencialom $\mathrm{d}u=-\sin t\,\mathrm{d}t$. Ko je $t=0$, je $u=1$, in ko je $t=\pi$, je $u=-1$. Upoštevamo še formulo $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

7. Izračunajte površino telesa, ki nastane, če zavrtimo cikloido $x=r(t-\sin t)$, $y=r(1-\cos t)$ na intervalu $0\le t\le 2\pi$ okrog osi x.

Cikloida je narisana za $a=1$.



Slika 10: Graf krivulje $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$: cikloida.

Površino rotacijskega telesa izračunamo po zgornji formuli. Ker je $\dot{x}=r(1-\cos t)$, $\dot{y}=r\sin t$ in

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \sqrt{r^2(1-2\cos t+\cos^2 t)+r^2\sin^2 t} = r\sqrt{2-2\cos t} = 2r\sin\frac{t}{2},$$

sledi

$$\begin{aligned}P &= 2\pi\int_0^{2\pi} r(1-\cos t)\cdot 2r\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8\pi r^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= 16\pi r^2\int_0^\pi (1-\cos^2 u)\sin u\,\mathrm{d}u = 16\pi r^2\int_{-1}^1 (1-v^2)\,\mathrm{d}v\\ &= 16\pi r^2\left(v-\frac{v^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{64\pi r^2}{3}.\end{aligned}$$

V drugem koraku uporabimo substitucijo $u=\frac{t}{2}$, v tretjem pa substitucijo $v=\cos u$ ter zamenjamo meje.