Univerza v Ljubljani

Fakulteta za elektrotehniko

Andrej Perne

ZBIRKA REŠENIH NALOG IZ MATEMATIKE II

Skripta za vaje iz Matematike II (UNI + VSP)

Ljubljana, 2013

DETERMINANTE

Determinanta $\det A$ je število, prirejeno kvadratni shemi A

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

i) Če so v neki vrstici/stolpcu same 0, je determinanta enaka 0.

ii) Če sta dve vrstici/stolpca enaki, je determinanta enaka 0.

iii) Če je neka vrstica/stolpec večkratnik neke druge vrstice/stolpca, je determinanta enaka 0.

iv) Če zamenjamo dve sosednji vrstici/stolpca, determinanta spremeni predznak.

v) Če vrstici/stolpcu prištejemo večkratnik druge vrstice/stolpca, se determinanta ohrani.

Razvoj po vrstici/stolpcu:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} A_{ij}.$$

A_{ij} je kvadratna shema, ki jo dobimo iz sheme A tako, da izbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec.

Kramerjevo pravilo:

Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3. \end{aligned}$$

Izračunamo determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Rešitev sistema je

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}.$$

1. Izračunajte naslednje determinante 2×2.

   a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4$

   b) $\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 34$

   c) $\begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a^2} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2} \end{vmatrix} = \frac{(1+a^2)^2}{(1-a^2)^2} - \frac{4a^2}{(1-a^2)^2} = \frac{(1-a^2)^2}{(1-a^2)^2} = 1,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq \pm 1$

2. Izračunajte naslednje determinante 3×3.

   a) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 18 - 10 - 30 + 14 - 6 = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6$

c) $\begin{vmatrix} 15 & 25 & 40 \\ 1 & 3 & 28 \\ 5 & 2 & 24 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 28 \\ 5 & 2 & 24 \end{vmatrix} = 20 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 20 \cdot 131 = 2620$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2(20-6) + 1(-2-5) = 21$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(-4-2) - 1(8-8) + 2(2+4) = 6$

f)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1+\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 0 & 2-3\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} & 0 \end{vmatrix} &= (1+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) + (1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})(2+3\mathrm{i}) \\ &= (5-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) + (3+\mathrm{i})(2+3\mathrm{i}) = 6 \end{aligned}$$

3. S pomočjo razvoja po vrstici/stolpcu izračunajte naslednje determinante.

   a) Najprej v prvem stolpcu pridelamo ničle, nato pa po njem razvijemo determinanto.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$

   b) Najprej v prvi vrstici pridelamo ničle, nato pa po njej razvijemo determinanto.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ -3 & 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ -5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 216$$

   c) Najprej v tretji vrstici pridelamo ničle, nato pa po njej razvijemo determinanto. V drugem in tretjem koraku pridelamo ničle v prvem stolpcu, nato pa po njem razvijemo determinanto.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

   d) Determinanto razvijemo najprej po tretji vrstici, nato po četrtem stolpcu in nazadnje po prvi vrstici.

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 120$$

e) Najprej v četrtem stolpcu pridelamo ničle, nato pa po njem razvijemo determinanto. V drugem koraku pridelamo ničle v tretji vrstici in po njej razvijemo determinanto. V tretjem koraku pa pridelamo ničle v prvem stolpcu in po njem razvijemo determinanto.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 7 & 4 & 9 & -1 & 11 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & 11 & 1 & 13 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 9 & 1 & 16 & 0 & 20 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 4 & 0 & 4 & -9 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 9 & 1 & 16 & 20 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 4 & 4 & -9 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 & 0 \\ 9 & 1 & 25 & 11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 11 & -3 & -9 \\ 4 & 0 & 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 25 & 11 & 6 \\ -1 & 11 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 25 & 11 & 6 \\ 0 & 36 & 8 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 36 & 8 & -6 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 15$$

4. (♣) Z uporabo rekurzije izračunajte $n \times n$ determinanto

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Najprej napravimo razvoj po prvem stolpcu, nato pa na drugi determinanti še po prvi vrstici

$$\begin{aligned} D_n &= 5\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5D_{n-1} - 4\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5D_{n-1} - 4D_{n-2}. \end{aligned}$$

Dobimo rekurzivno enačbo $D_n = 5D_{n-1} - 4D_{n-2}$, ki jo rešimo z nastavkom $D_n = \lambda^n$

$$\begin{aligned} \lambda^n - 5\lambda^{n-1} + 4\lambda^{n-2} &= 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Torej je $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 4$. Splošna rešitev je kombinacija obeh rešitev

$$D_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A + B\,4^n.$$

Koeficienta A in B določimo tako, da izračunamo determinanti $D_1 = 5$ in $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21$.

Dobimo sistem enačb $A + 4B = 5$ in $A + 16B = 21$, ki ima rešitev $A = \frac{4}{3}$ in $B = -\frac{1}{3}$. Splošna rešitev determinante je

$$D_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

5. Izračunajte naslednje determinante. Za katere vrednosti parametra t je determinanta enaka 0?

a) $\begin{vmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)(t-1) - 12 = t^2 - 3t - 10 = (t-5)(t+2) = 0$

Rešitvi kvadratne enačbe sta $t_1 = 5$ in $t_2 = -2$.

b) $\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2) = 0$

Z uporabo Hornerjevega algoritma dobimo ničle polinoma tretje stopnje $t_{1,2} = 1$ in $t_3 = -2$.

c) $\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix} = (t-4)(t^2 + 4t + 4) = (t-4)(t+2)^2 = 0$

Rešitve enačbe tretje stopnje so $t_{1,2} = -2$ in $t_3 = 4$.

6. Z uporabo Kramerjevega pravila rešite naslednje sisteme enačb.

a)

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 3x - 5y &= 4 \end{aligned}$$

Izračunamo vse tri determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -13, \quad D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -39, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -13.$$

Sledi $x = \frac{D_x}{D} = 3$ in $y = \frac{D_y}{D} = 1$.

b)

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1 \\ x + y + z &= 6 \\ 3x + y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Izračunamo vse štiri determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23, \qquad D_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -46, \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -69.$$

Sledi $x = \frac{D_x}{D} = 1$, $y = \frac{D_y}{D} = 2$ in $z = \frac{D_z}{D} = 3$.

c)

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 11 \\ x + 5y + 3z &= -15 \\ 4x - y - 4z &= 30 \end{aligned}$$

Izračunamo vse štiri determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -103, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -15 & 5 & 3 \\ 30 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -412,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 1 & -15 & 3 \\ 4 & 30 & -4 \end{vmatrix} = 206, \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 5 & -15 \\ 4 & -1 & 30 \end{vmatrix} = 309.$$

Sledi $x = \frac{D_x}{D} = 4$, $y = \frac{D_y}{D} = -2$ in $z = \frac{D_z}{D} = -3$.

VEKTORJI

Skalarni produkt:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}_{\vec{a}}| = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}_{\vec{b}}|$
$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ oz. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$: komutativnost
$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

v $\mathbb{C}$: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + a_3\bar{b}_3$
Standardni bazni vektorji v $\mathbb{R}^3$: $\vec{\imath} = (1,0,0),\ \vec{\jmath} = (0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,1)$.
Pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$: $\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Vektorski produkt:

Vektorski produkt $\vec{a}\times\vec{b}$ vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor, za katerega velja
i) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$ in velja pravilo desnega vijaka,
ii) dolžina $|\vec{a}\times\vec{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$
$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$: antikomutativnost
$\vec{a}\|\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Velja: $\vec{\imath}\times\vec{\jmath} = \vec{k},\ \vec{\jmath}\times\vec{k} = \vec{\imath},\ \vec{k}\times\vec{\imath} = \vec{\jmath}$.

Mešani produkt:

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$
$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b})$
Absolutna vrednost mešanega produkta $|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$ vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ predstavlja volumen paralelepipeda, ki ga napenjajo ti trije vektorji.
$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ so komplanarni

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3),\ \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \quad \Rightarrow \quad (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

1. Dana sta vektorja $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ in $\vec{b} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$. Določite kot med njima ter pravokotni projekciji enega na drugega.

   Vektorja zapišemo s komponentami $\vec{a} = (2,2,0)$ in $\vec{b} = (2,1,1)$. Kot med vektorjema izračunamo iz definicije skalarnega produkta

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

   Pravokotni projekciji izračunamo s formulama

$$\begin{aligned} \vec{b}_{\vec{a}} &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} = \tfrac{6}{8}(2,2,0) = (\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},0), \\ \vec{a}_{\vec{b}} &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b} = \tfrac{6}{6}(2,1,1) = (2,1,1). \end{aligned}$$

2. Izračunajte skalarni produkt kompleksnih vektorjev $\vec{a} = (2+\mathrm{i}, \mathrm{i}, 3-\mathrm{i})$ in $\vec{b} = (-\mathrm{i}, 1+2\mathrm{i}, -2)$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2+\mathrm{i})\mathrm{i} + \mathrm{i}(1-2\mathrm{i}) - 2(3-\mathrm{i}) = -5+5\mathrm{i}$$

3. Določite kot med vektorjema $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ in $\vec{b} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

   Vektorja zapišemo po komponentah $\vec{a} = (1,2,2)$, $\vec{b} = (4,4,-2)$. Sledi

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{8}{\sqrt{9}\sqrt{36}} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 63.6^\circ.$$

4. Izračunajte skalarni produkt $(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$, kjer je $\vec{a}$ pravokoten na $\vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$ in $|\vec{b}| = 3$.

$$(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = 10\vec{a}\cdot\vec{a} + 6\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}_{=0} - 5\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=0} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 13$$

5. Izračunajte skalarni produkt $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b})$, kjer je kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak $\frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 4$ in $|\vec{b}| = 6$.

$$\begin{aligned}(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b}) &= 15\vec{a}\cdot\vec{a} - 10\vec{b}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= 15\vec{a}\cdot\vec{a} - 28\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 12|\vec{b}|^2\\ &= 240 - 336 + 432 = 336\end{aligned}$$

6. Določite kot, ki ga oklepata enotska vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če sta vektorja $\vec{a}+2\vec{b}$ in $5\vec{a}-4\vec{b}$ ortogonalna. Iz enakosti

$$0 = (\vec{a}+2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-4\vec{b}) = 5|\vec{a}|^2 + 6|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi - 8|\vec{b}|^2 = -3 + 6\cos\varphi$$

   sledi

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tfrac{\pi}{3}.$$

7. Določite parameter $t \in \mathbb{R}$ tako, da vektorja $\vec{a} = (t, t+5, \sqrt{3})$ in $\vec{b} = (1,0,0)$, dana s koordinatami v neki bazi, oklepata kot $\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi\\ t &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2t^2+10t+28}\\ 4t^2 &= 2t^2+10t+28\\ 0 &= t^2-5t-14\\ 0 &= (t-7)(t+2)\end{aligned}$$

   Dobimo dve rešitvi $t_1 = 7$ in $t_2 = -2$, od katerih je le prva smiselna.

8. Določite dolžine stranic in notranje kote trikotnika z oglišči $A(0,3,4)$, $B(3,2,3)$ in $C(1,4,1)$.

   Vektorji stanic so

$$\vec{a} = \vec{BC} = (-2,2,-2), \qquad \vec{b} = \vec{AC} = (1,1,-3), \qquad \vec{c} = \vec{AB} = (3,-1,-1).$$

   Dolžine stranic so

$$a = |\vec{a}| = 2\sqrt{3}, \qquad b = |\vec{b}| = \sqrt{11}, \qquad c = |\vec{c}| = \sqrt{11}.$$

   Notranji koti so

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos\frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{c}||\vec{b}|} = \arccos\tfrac{5}{11} \approx 63^\circ,\\ \beta &= \arccos\frac{-\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|} = \arccos\tfrac{6}{2\sqrt{33}} \approx 58.5^\circ,\\ \gamma &= 180^\circ - \alpha - \beta \approx 58.5^\circ.\end{aligned}$$

9. Izračunajte $\vec{a} \times \vec{b}$ in $\vec{b} \times \vec{a}$, kjer sta $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ in $\vec{b} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$.

   Vektorja zapišemo s komponentami $\vec{a} = (1, 1, 1)$ in $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ ter dobimo

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1, -4, 3), \\ \vec{b} \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 4, -3) = -\vec{a} \times \vec{b}. \end{aligned}$$

10. Izračunajte ploščino paralelograma, ki ga oklepata vektorja $\vec{a} = 6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ in $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$.

    Ploščina paralelograma je enaka dolžini vektorskega produkta vektorjev $\vec{a} = (6, 3, -2)$ in $\vec{b} = (3, -2, 6)$

$$p = |\vec{a} \times \vec{b}| = 7\sqrt{49} = 49,$$

    kjer je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (14, -42, -21) = 7(2, -6, -3).$$

11. Izračunajte ploščino paralelograma, ki ga oklepata vektorja $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$ in $\vec{b} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$.

    Vektorja zapišemo po komponentah $\vec{a} = (2, -1, -1)$ in $\vec{b} = (1, 3, -1)$. Ker je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4, 1, 7),$$

    je ploščina paralelograma enaka

$$p = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{66}.$$

12. Izračunajte ploščino trikotnika z oglišči $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$ in $C(4, 3, 2)$.

    Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki napenjata trikotnik, sta $\vec{a} = \vec{AB} = (1, 2, 3)$ in $\vec{b} = \vec{AC} = (3, 2, 1)$. Ploščina trikotnika je enaka polovici ploščine paralelograma

$$p_{\triangle} = \tfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = 2\sqrt{6},$$

    kjer je vektorski produkt enak

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 8, -4) = 4(-1, 2, -1).$$

13. Izračunajte ploščino trikotnika z oglišči $A(3, 3, 1)$, $B(1, 3, 1)$ in $C(2, 2, 5)$.

    Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki napenjata trikotnik, sta $\vec{a} = \vec{AB} = (-2, 0, 0)$ in $\vec{b} = \vec{AC} = (-1, -1, 4)$. Ploščina trikotnika je enaka polovici ploščine paralelograma

$$p_{\triangle} = \tfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{17},$$

    kjer je vektorski produkt enak

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (0, 8, 2).$$

14. Izračunajte ploščino trikotnika z oglišči $A(1,2,2)$, $B(2,-3,-1)$ in $C(3,-2,-2)$. Izračunajte še kot α in dolžino stranice c.

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki napenjata trikotnik, sta $\vec{a} = \vec{AB} = (1,-5,-3)$ in $\vec{b} = \vec{AC} = (2,-4,-4)$. Ploščina trikotnika je enaka polovici ploščine paralelograma

$$p_\Delta = \tfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{26},$$

kjer je vektorski produkt enak $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = (8,-2,6)$. Kot α dobimo iz definicije skalarnega produkta

$$\cos\alpha = \tfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \tfrac{17}{3\sqrt{35}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 16.7^\circ.$$

Dolžina stranice c je enaka dolžini vektorja $\vec{a}$, torej $c = |\vec{a}| = \sqrt{35}$.

15. Izračunajte ploščino paralelograma, ki ga določata vektorja $\vec{a} + 3\vec{b}$ in $3\vec{a} + \vec{b}$, če je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa je $\frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} p &= |(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b})| = |3\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{=0} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{=0}| \\ &= |-8\vec{a} \times \vec{b}| = 8|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = 8\sin\tfrac{\pi}{6} = 4 \end{aligned}$$

16. Izračunajte ploščino trikotnika, ki je napet med vektorjema $2\vec{a} - \vec{b}$ in $3\vec{a} + 2\vec{b}$, če je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa je $\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} p &= \tfrac{1}{2}|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})| = \tfrac{1}{2}|6\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{=0} + 4\vec{a} \times \vec{b} - 3\vec{b} \times \vec{a} - 2\underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{=0}| \\ &= \tfrac{1}{2}|7\vec{a} \times \vec{b}| = \tfrac{7}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = 21\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{21\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

17. Poenostavite izraz $\vec{\imath} \times (\vec{\jmath} + \vec{k}) - \vec{\jmath} \times (\vec{\imath} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$.

$$\begin{aligned} \vec{\imath} \times (\vec{\jmath} + \vec{k}) - \vec{\jmath} \times (\vec{\imath} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}) &= \vec{\imath} \times \vec{\jmath} + \vec{\imath} \times \vec{k} - \vec{\jmath} \times \vec{\imath} - \vec{\jmath} \times \vec{k} + \vec{k} \times \vec{\imath} + \vec{k} \times \vec{\jmath} + \underbrace{\vec{k} \times \vec{k}}_{=0} \\ &= \vec{k} - \vec{\jmath} + \vec{k} - \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{\imath} = -2\vec{\imath} + 2\vec{k} \end{aligned}$$

18. Izračunajte prostornino paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$ in $\vec{c} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$.

Prostornina paralelepipeda je enaka absolutni vrednosti mešanega produkta vektorjev $\vec{a} = (2,-1,-1)$, $\vec{b} = (1,3,-1)$ in $\vec{c} = (1,1,4)$, ki ga napenjajo

$$V = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 33.$$

19. Izračunajte prostornino tristrane piramide z oglišči $A(2,2,2)$, $B(4,3,3)$, $C(4,5,4)$ in $D(5,5,6)$.

Prostornina tristrane piramide in prostornina paralelepipeda sta povezani z zvezo

$$V_{piramide} = \frac{1}{6}V_{paralelepipeda}.$$

Vektorji, ki napenjajo piramido, so $\vec{a} = \vec{AB} = (2,1,1)$, $\vec{b} = \vec{AC} = (2,3,2)$ in $\vec{c} = \vec{AD} = (3,3,4)$. Ker je mešani produkt enak

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7,$$

je prostornina piramide enaka $V = \frac{7}{6}$.

20. Izračunajte prostornino tristrane piramide z oglišči $A(2,-1,-3)$, $B(3,1,1)$, $C(-2,2,-1)$ in $D(3,-3,1)$.

Vektorji, ki napenjajo piramido, so $\vec{a} = \vec{AB} = (1,2,4)$, $\vec{b} = \vec{AC} = (-4,3,2)$ in $\vec{c} = \vec{AD} = (1,-2,4)$. Ker je mešani produkt enak

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 72,$$

je prostornina piramide enaka $V = \frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = 12$.

21. Dokažite, da točke $A(2,-1,-2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,3,0)$ in $D(5,0,-6)$ ležijo na isti ravnini.

Zapišemo vektorje $\vec{a} = \vec{AB} = (-1,3,3)$, $\vec{b} = \vec{AC} = (0,4,2)$ in $\vec{c} = \vec{AD} = (3,1,-4)$. Ker je

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

ti vektorji ležijo na isti ravnini, kar pomeni, da dane točke ležijo na isti ravnini.

22. Dani so vektorji $\vec{a} = (\lambda,1,4)$, $\vec{b} = (1,-2\lambda,0)$ in $\vec{c} = (3\lambda,-3,4)$. Določite parameter λ tako, da bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ komplanarni.

Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so komplanarni natanko tedaj, ko je mešani produkt

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 4 \\ 1 & -2\lambda & 0 \\ 3\lambda & -3 & 4 \end{vmatrix} = -8\lambda^2 - 12 + 24\lambda^2 - 4 = 16\lambda^2 - 16 = 0.$$

Ta enačba ima dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -1$.

23. Pokažite, da vektorji $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + (\lambda+1)\vec{k}$ in $\vec{c} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \lambda\vec{k}$ za nobeno vrednost parametra λ ne ležijo v isti ravnini.

Vektorji so nekomplanarni, če je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ neodvisen od parametra λ in različen od 0. Ker je

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda+1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + \lambda + 1 - \lambda - \lambda + \lambda + 1 - \lambda = 2 \neq 0,$$

vektorji ne ležijo v isti ravnini.

24. Dana so tri oglišča paralelograma $ABCD$: $A(1,-2,0)$, $B(2,1,3)$ in $C(-2,0,5)$. Določite koordinate oglišča D, ploščino paralelograma in dolžino diagonale BD.

Krajevni vektor oglišča D paralelograma izračunamo po formuli

$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \vec{AD} = \vec{r}_A + \vec{BC} = (1,-2,0) + (-4,-1,2) = (-3,-3,2).$$

Torej je $D(-3,-3,2)$. Vektor $\vec{BD} = (-5,-4,-1)$ ima dolžino $|\vec{BD}| = \sqrt{42}$. Ploščino paralelograma izračunamo po formuli

$$p = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{398},$$

kjer je $\vec{a} = \vec{AB} = (1,3,3)$, $\vec{b} = \vec{AD} = (-4,-1,2)$ in $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (9,-14,11)$.

25. Dana so tri oglišča paralelograma $ABCD$: $A(2,1,2)$, $B(1,-1,1)$ in $D(2,2,4)$. Določite koordinate oglišča C, obseg in ploščino paralelograma ter kot med diagonalama.

Krajevni vektor oglišča C paralelograma izračunamo po formuli

$$\vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{BC} = \vec{r}_B + \vec{AD} = (1,-1,1) + (0,1,2) = (1,0,3).$$

Torej je $C(1,0,3)$. Obseg paralelograma izračunamo po formuli

$$o = 2(|\vec{a}| + |\vec{b}|) = 2(\sqrt{5} + \sqrt{6}),$$

kjer je $\vec{a} = \vec{AB} = (-1,-2,-1)$ in $\vec{b} = \vec{AD} = (0,1,2)$. Ploščino paralelograma pa izračunamo po formuli

$$p = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{14},$$

kjer je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3,2,-1).$$

Kot med diagonalama $\vec{e} = \vec{AC} = (-1,-1,1)$ in $\vec{f} = \vec{BD} = (1,3,3)$ pa izračunamo iz definicije skalarnega produkta

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{e} \cdot \vec{f}|}{|\vec{e}||\vec{f}|} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{19}} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 82.4^\circ.$$

26. Dan je trikotnik z oglišči $A(2,0,1)$, $B(1,-2,3)$ in $C(0,4,2)$. Določite težišče T trikotnika, vektor med razpoloviščem S stranice AB in težiščem ter ploščino trikotnika.

Krajevni vektor težišča T trikotnika izračunamo po formuli

$$\vec{r}_T = \tfrac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) = \tfrac{1}{3}(3,2,6) = (1, \tfrac{2}{3}, 2).$$

Torej je $T(1, \frac{2}{3}, 2)$. Krajevni vektor razpolovišča S daljice izračunamo po formuli

$$\vec{r}_S = \tfrac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B) = \tfrac{1}{2}(3,-2,4) = (\tfrac{3}{2}, -1, 2).$$

Torej je $S(\frac{3}{2}, -1, 2)$. Vektor $\vec{ST} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, 0)$. Ploščino trikotnika izračunamo po formuli

$$p = \tfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \tfrac{\sqrt{173}}{2},$$

kjer je $\vec{a} = \vec{AB} = (-1,-2,2)$, $\vec{b} = \vec{AC} = (-2,4,1)$ in $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-10,-3,-8)$.

27. Dana so oglišča tristrane piramide $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$ in $D(3,7,2)$. Izračunajte višino skozi oglišče A.

Volumen tristrane piramide zapišemo na dva različna načina

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3}\mathcal{O}v = \tfrac{1}{6}|\vec{a} \times \vec{b}|\, v, \\ V &= \tfrac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|. \end{aligned}$$

Pri tem smo označili vektorje $\vec{a} = \vec{BC} = (4,-1,-2)$, $\vec{b} = \vec{BD} = (1,4,-3)$ in $\vec{c} = \vec{BA} = (-2,-3,-4)$. Obe izražavi za volumen izenačimo in dobimo formulo za višino na oglišče A

$$v = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17},$$

kjer je vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (11,10,17)$, dolžina vektorskega produkta $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{510}$ in mešani produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (11,10,17) \cdot (-2,-3,-4) = -120$.

28. Dana so oglišča tristrane piramide $A(3,1,0)$, $B(4,3,1)$, $C(2,2,0)$ in $V(a,0,1)$. Določite parameter a tako, da bo prostornina piramide enaka 1. Določite še višino piramide.

Najprej določimo tri vektorje, ki napenjajo piramido: $\vec{a} = \vec{AB} = (1,2,1)$, $\vec{b} = \vec{AC} = (-1,1,0)$ in $\vec{c} = \vec{AV} = (a-3,-1,1)$. Prostornini piramide in paralelepipeda sta v razmerju $1:6$, zato rešujemo enačbo

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|, \\ 6 &= |7-a|, \end{aligned}$$

kjer je $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 7-a$. Ta enačba ima dve rešitvi $a_1 = 1$ in $a_2 = 13$. Ploščina osnovne ploskve ABC je enaka

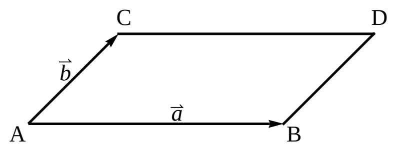
$$p = \tfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \tfrac{\sqrt{11}}{2},$$

kjer je $\vec{a}\times\vec{b} = (-1,-1,3)$. Ker je $V_{pir} = \frac{1}{3}pv$, je višina piramide enaka

$$v = \tfrac{3V}{p} = \tfrac{6\sqrt{11}}{11}.$$

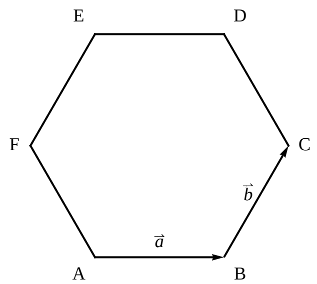
29. Dan je paralelogram $ABCD$. Označimo $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{AD}$. Izrazite z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorje $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AC}$ in $\vec{BD}$.

Na sliki je označen paralelogram. Sledi $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CD} = -\vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{a}+\vec{b}$ in $\vec{BD} = \vec{b}-\vec{a}$.



30. Dan je pravilen šestkotnik $ABCDEF$. Označimo $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{BC}$. Izrazite z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorje $\vec{AC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, $\vec{BE}$, $\vec{AE}$, $\vec{BF}$ in $\vec{DF}$.

Na sliki je označen pravilen šestkotnik. Sledi $\vec{AC} = \vec{a}+\vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{b}-\vec{a}$, $\vec{AD} = 2\vec{b}$, $\vec{BE} = 2\vec{b}-2\vec{a}$, $\vec{AE} = 2\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{BF} = \vec{b}-2\vec{a}$ in $\vec{DF} = -\vec{a}-\vec{b}$.



31. V trikotniku ABC leži točka M na stranici BC, tako da velja $\frac{|\vec{BM}|}{|\vec{MC}|} = \lambda$. Izrazite vektor $\vec{AM}$ z vektorjema $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{AC}$.

Izrazimo najprej vektor $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{a} + \mu\vec{BC} = \vec{a} + \mu(\vec{b}-\vec{a})$, kjer je $\mu = \frac{|\vec{BM}|}{|\vec{BC}|}$. Potrebujemo še zvezo med parametroma μ in λ. Enačbo $|\vec{BC}| = |\vec{BM}| + |\vec{MC}|$ delimo z $|\vec{BM}|$ in dobimo enačbo $\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{1}{\lambda}$. Torej je $\mu = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ in zato

$$\vec{AM} = \tfrac{\lambda}{\lambda+1}\vec{b} + \tfrac{1}{\lambda+1}\vec{a}.$$

32. Dokažite, da se diagonali v paralelogramu razpolavljata.

Skiciramo paralelogram v katerem z S označimo razpolovišče diagonal. Označimo vektorja $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{AD}$. Vektor $\vec{AS}$ izrazimo na dva načina

$$\begin{aligned} \vec{AS} &= \lambda\vec{AC} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}), \\ \vec{AS} &= \vec{AB} + \vec{BS} = \vec{a} + \mu\vec{BD} = \vec{a} + \mu(\vec{b} - \vec{a}). \end{aligned}$$

Obe izražavi izenačimo

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \mu(\vec{b} - \vec{a})$$

in združimo na eni strani

$$(\lambda + \mu - 1)\vec{a} + (\lambda - \mu)\vec{b} = 0.$$

Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna, je to možno le v primeru, ko sta oba koeficienta enaka 0. Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \lambda + \mu - 1 &= 0, \\ \lambda - \mu &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, kar pomeni, da se diagonali v paralelogramu razpolavljata.

33. Dokažite, da daljica, ki povezuje eno oglišče paralelograma z razpoloviščem nasprotne stranice, deli diagonalo v razmerju 1 : 2.

Označimo z S presečišče daljice in nasprotne diagonale, z M pa razpolovišče nasprotne stranice. Označimo še vektorja $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{AD}$. Vektor $\vec{BS}$ izrazimo na dva načina

$$\begin{aligned} \vec{BS} &= \lambda\vec{BD} = \lambda(\vec{b} - \vec{a}), \\ \vec{BS} &= \vec{BM} + \vec{MS} = \tfrac{1}{2}\vec{b} + \mu\vec{MA} = \tfrac{1}{2}\vec{b} + \mu\left(-\tfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right). \end{aligned}$$

Obe izražavi izenačimo

$$\lambda(\vec{b} - \vec{a}) = \tfrac{1}{2}\vec{b} + \mu\left(-\tfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right)$$

in združimo na eni strani

$$(-\lambda + \mu)\vec{a} + \left(\lambda + \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\right)\vec{b} = 0.$$

Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna, je to možno le v primeru, ko sta oba koeficienta enaka 0. Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} -\lambda + \mu &= 0, \\ \lambda + \tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2} &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$, kar pomeni, da daljica deli nasprotno diagonalo v razmerju 1 : 2.

34. (♣) Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ napenjajo tetraeder s prostornino 3. Kolikšna je prostornina tetraedra, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$?

Ker je prostornina tetraedra, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ enaka 3, to pomeni, da je mešani produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 18$. Prostornina tetraedra, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$, je enaka

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}) = \tfrac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot ((\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})) \\ &= \tfrac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot ((\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c})\vec{a}) \\ &= \tfrac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\underbrace{(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})}_{=18}\vec{c} - \underbrace{(\vec{b}, \vec{c}, \vec{c})}_{=0}\vec{a}) = 3(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 54. \end{aligned}$$

Pri tem smo uporabili formulo za dvojni vektorski produkt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

ANALITIČNA GEOMETRIJA

Enačba premice:

Premica v prostoru je določena s točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ na premici in smernim vektorjem $\vec{e} = (a, b, c)$ premice, $T(x, y, z)$ točka na premici.

Vektorska oblika

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{e}.$$

Parametrična oblika

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot a, \\ y &= y_0 + t \cdot b, \\ z &= z_0 + t \cdot c. \end{aligned}$$

Kanonična oblika

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Enačba ravnine:

Ravnina v prostoru je določena s točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ na ravnini in normalo $\vec{n} = (a, b, c)$ ravnine, $T(x, y, z)$ točka na ravnini.

Implicitna oblika

$$ax + by + cz = d, \qquad d = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

Razdalje:

a) Razdalja med točko $T(x_0, y_0, z_0)$ in ravnino $\pi : ax + by + cz = d$ je

$$d(T, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

b) Razdalja med točko T in premico p s točko T_0 in smernim vektorjem $\vec{e}$ je

$$d(T, p) = \frac{|\vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)|}{|\vec{e}|}.$$

c) Razdalja med vzporednima premicama p_1 in p_2, kjer je T_1 točka na premici p_1, je

$$d(p_1, p_2) = d(T_1, p_2).$$

d) Razdalja med mimobežnima premicama p_1 in p_2, kjer je T_1 točka na p_1, T_2 točka na p_2, $\vec{r} = \vec{T_1T_2}$, je

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{r})|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}.$$

Zrcaljenja:

a) Zrcaljenje točke T čez premico p, T' zrcalna točka

$$\vec{r'} = \vec{r} + \vec{TT'} = \vec{r} + 2\vec{TS} = \vec{r} + 2\left(\frac{\vec{T_0T} \cdot \vec{e}}{|\vec{e}|^2}\,\vec{e} - \vec{T_0T}\right).$$

b) Zrcaljenje točke T čez ravnino π, T' zrcalna točka

$$\vec{r'} = \vec{r} + \vec{TT'} = \vec{r} + 2\vec{TS} = \vec{r} + 2\left(\pm d(T, \pi)\,\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right).$$

1. Zapišite enačbo premice, ki gre skozi točko $T(1,1,1)$ in je vzporedna vektorju $\vec{e}=(2,1,-1)$, v vseh treh oblikah.

   Enačba premice:

   i) vektorska oblika: $\vec{r}=(1,1,1)+t(2,1,-1)$,
   ii) parametrična oblika: $x=1+2t$, $y=1+t$, $z=1-t$,
   iii) kanonična oblika: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

2. Zapišite enačbo premice, ki gre skozi točki $A(1,0,1)$ in $B(1,-1,0)$, v vseh treh oblikah.

   Smerni vektor je $\vec{e}=\vec{AB}=(0,-1,-1)$. Enačba premice:

   i) vektorska oblika: $\vec{r}=(1,0,1)+t(0,-1,-1)$,
   ii) parametrična oblika: $x=1$, $y=-t$, $z=1-t$,
   iii) kanonična oblika: $x=1$, $\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

3. Zapišite enačbo premice, ki je pravokotna na vektorja $\vec{e}_1=(2,3,1)$ in $\vec{e}_2=(3,1,2)$ ter gre skozi točko $T(1,1,1)$, v vseh treh oblikah.

   Premica, ki je pravokotna na dana dva vektorja, ima smer vektorskega produkta teh dveh vektorjev. Vektorski produkt je $\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=(5,-1,-7)$. Enačba premice:

   i) vektorska oblika: $\vec{r}=(1,1,1)+t(5,-1,-7)$,
   ii) parametrična oblika: $x=1+5t$, $y=1-t$, $z=1-7t$,
   iii) kanonična oblika: $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-7}$.

4. Zapišite enačbo ravnine, ki gre skozi točko $T(2,3,5)$ in je pravokotna na vektor $\vec{n}=(4,3,2)$. Normirajte to enačbo.

   Vektor $\vec{n}$ je ravno normala ravnine. Izračunamo še koeficient $d=(4,3,2)\cdot(2,3,5)=27$. Enačba ravnine je $4x+3y+2z=27$. Normirano enačbo dobimo tako, da jo delimo z dolžino normale, ki je $\sqrt{29}$

   $$\frac{4}{\sqrt{29}}x+\frac{3}{\sqrt{29}}y+\frac{2}{\sqrt{29}}z=\frac{27}{\sqrt{29}}.$$

5. Zapišite enačbo ravnine skozi točko $T(2,3,-1)$, ki je vzporedna ravnini $5x-3y+2z=10$.

   Vzporedni ravnini imata vzporedni normali, torej lahko vzamemo za normalo iskane ravnine kar normalo dane ravnine. Izračunamo še koeficient $d=(5,-3,2)\cdot(2,3,-1)=-1$. Enačba ravnine

   $$5x-3y+2z=-1.$$

6. Zapišite enačbo ravnine skozi točke $A(0,0,0)$, $B(4,-2,1)$ in $C(2,4,-3)$.

   Najprej zapišemo dva vektorja, ki ležita v ravnini $\vec{a}=\vec{AB}=(4,-2,1)$ in $\vec{b}=\vec{AC}=(2,4,-3)$. Normala je pravokotna na ravnino, torej na ta dva vektorja in zato lahko za normalo vzamemo kar vektorski produkt teh dveh vektorjev

   $$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -3\end{vmatrix}=(2,14,20).$$

   Izračunamo še koeficient $d=0$, kjer lahko uporabimo katerokoli točko, recimo A. Koeficient d je enak 0, ko izhodišče leži na ravnini. Enačba ravnine je

   $$2x+14y+20z=0.$$

7. Zapišite enačbo ravnine, ki gre skozi točke $A(1,1,1)$, $B(-1,1,1)$ in $C(0,0,1)$.

   Normala ravnine je vektorski produkt dveh vektorjev, ki ležita v ravnini

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,2),$$

   kjer je $\vec{a} = \vec{AB} = (-2,0,0)$ in $\vec{b} = \vec{AC} = (-1,-1,0)$. Izračunamo še koeficient $d = 2$. Enačba ravnine je $2z = 2$ oz. $z = 1$.

8. Zapišite enačbo ravnine, v kateri ležita premici $\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$ in $\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$.

   Iz enačb premic je razvidno, da sta vzporedni s smernim vektorjem $\vec{e} = (7,4,2)$. Začetni točki na premicah sta $A(0,0,0)$ in $B(1,3,4)$. Ker za vektorski produkt potrebujemo dva nevzporedna vektorja, vzamemo poleg vektorja $\vec{e}$ še vektor $\vec{r} = \vec{AB} = (1,3,4)$ in izračunamo vektorski produkt

$$\vec{e} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (10,-26,17).$$

   Enačba ravnine je $10x - 26y + 17z = 0$.

9. Zapišite enačbo ravnine, ki gre skozi točki $A(1,0,3)$ in $B(2,5,1)$ ter je pravokotna na ravnino $\pi : x + y + z = 1$.

   Normala ravnine $\vec{n} = (1,1,1)$, ki je pravokotna na iskano ravnino leži v tej ravnini. Drugi vektor, ki leži v iskani ravnini, je vektor $\vec{r} = \vec{AB} = (1,5,-2)$. Ker je

$$\vec{n} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-7,3,4)$$

   in koeficient $d = (-7,3,4) \cdot (1,0,3) = 5$, je enačba iskane ravnine $-7x + 3y + 4z = 5$.

10. Določite presečišče ravnin $x + y + z = 3$, $x + 2y + 3z = 6$ in $2x - y + z = 2$.

    Presečišče treh ravnin dobimo tako, da rešimo gornji sistem treh enačb s tremi neznankami, ki ima rešitev $x = 1$, $y = 1$ in $z = 1$. Uporabimo Gaussovo eliminacijo spremenljivk. Presečišče treh ravnin je v tem primeru točka $T(1,1,1)$.

11. Določite presečišče ravnin $2x + 3y - z = 1$ in $x - y + z = 8$.

    Presečišče dveh ravnin dobimo tako, da rešimo poddoločen sistem enačb, ki ima manj enačb kot neznank. Rešitev je v tem primeru neskončno, kar geometrijsko pomeni, da je presek dveh ravnin premica. Eno neznanko, recimo x, proglasimo za parameter t in ostali dve spremenljivki izrazimo s tem parametrom. Tako dobimo parametrično obliko enačbe premice

$$x = t, \quad y = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}t \quad \text{in} \quad z = \frac{25}{2} - \frac{5}{2}t.$$

12. Določite točko, v kateri premica $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{1}$ prebode ravnino $2x + 3y + z = 14$.

    Iščemo točko, ki hkrati leži na premici in ravnini. Enačbo premice zapišimo v parametrični obliki

$$x = 1 + 2t, \quad y = -3 + 5t, \quad z = 1 + t.$$

    Izražave za x, y in z vstavimo v enačbo ravnine in dobimo

$$\begin{aligned} 2(1+2t) + 3(-3+5t) + (1+t) &= 14 \\ 20t &= 20 \\ t &= 1. \end{aligned}$$

    Torej je $x = 3$, $y = 2$ in $z = 2$, prebodišče pa je točka $P(3,2,2)$.

13. Določite presečišče premic $\vec{r} = (1, 2, 0) + t(1, 1, 1)$ in $\vec{r} = (2, 3, 1) + s(0, 3, -1)$.

Najprej zapišimo obe premici v parametrični obliki

i) prva premica: $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = t$,

ii) druga premica: $x = 2$, $y = 3 + 3s$, $z = 1 - s$.

Ti dve obliki izenačimo in dobimo sistem treh enačb z dvema neznankama, ki ima rešitev $t = 1$ in $s = 0$. To vstavimo v enačbo in dobimo presečišče v točki $T(2, 3, 1)$.

14. Določite parameter λ tako, da se premici

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-4}{3}, \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-\lambda}{2}$$

sekata. Določite še presečišče.

Najprej zapišimo obe premici v parametrični obliki

i) prva premica: $x = 1 + 2t$, $y = -2 - 2t$, $z = 4 + 3t$,

ii) druga premica: $x = -1 - s$, $y = 2 + 2s$, $z = \lambda + 2s$.

Ti dve obliki izenačimo in dobimo sistem treh enačb s tremi neznankami, ki ima rešitev $t = 0$, $s = -2$ in $\lambda = 8$. Presečišče je v točki $T(1, -2, 4)$.

15. Kolikšen mora biti parameter λ, da se premici

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{\lambda}, \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{4}$$

sekata? Določite še presečišče.

Najprej zapišimo obe premici v parametrični obliki

i) prva premica: $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 1 + \lambda t$,

ii) druga premica: $x = 2 + s$, $y = 3 + 2s$, $z = 4 + 4s$.

Ti dve obliki izenačimo in dobimo sistem treh enačb s tremi neznankami, ki ima rešitev $t = \frac{1}{3}$, $s = -\frac{2}{3}$ in $\lambda = 1$. Presečišče je v točki $T(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$. Parameter λ mora biti enak 1.

16. Določite kot med ravninama $x - 4y + 8z = 8$ in $x + z = 6$.

Kot med dvema ravninama je enak kotu med normalama teh dveh ravnin. Tega dobimo iz definicije skalarnega produkta. Obe normali sta $\vec{n}_1 = (1, -4, 8)$ in $\vec{n}_2 = (1, 0, 1)$. Ker je

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{9}{\sqrt{81}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

sledi, da je kot med ravninama enak $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

17. Določite kot med ravninama $x + z = 2$ in $2x - 2y + z = 7$.

Normali sta $\vec{n}_1 = (1, 0, 1)$ in $\vec{n}_2 = (2, -2, 1)$. Ker je

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

sledi, da je kot med ravninama enak $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

18. Določite kot med ravnino $x - z = 5$ in premico $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1}, z = 3$.

Kot med ravnino in premico je komplementaren kotu med normalo ravnine in smernim vektorjem premice. Ker je $\vec{n} = (1, 0, -1)$, $\vec{e} = (1, 1, 0)$ in

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{e}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

je kot med normalo in smernim vektorjem $\alpha = \frac{\pi}{3}$, kot med ravnino in premico pa $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{6}$.

19. Dani sta ravnina $2x - y = 1$ in premica $\frac{1-x}{2} = y = \frac{z}{\sqrt{15}}$. Določite prebodišče in kot pod katerim se sekata.

Enačbo premice zapišemo v parametrični obliki $x = 1 - 2t$, $y = t$ in $z = \sqrt{15}t$, ki jo vstavimo v enačbo ravnine in dobimo vrednost parametra $t = \frac{1}{5}$. Prebodišče je točka $P(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{15}}{5})$.
Kot med normalo $\vec{n} = (2, -1, 0)$ in smernim vektorjem $\vec{e} = (-2, 1, \sqrt{15})$ je

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{e}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{e}|} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3},$$

kot med ravnino in premico pa $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{6}$.

20. Poiščite pravokotno projekcijo točke $T(-4, -9, -5)$ na ravnino, ki je določena s točkami $A(0, 1, 3)$, $B(-3, 2, 4)$ in $C(4, 1, -2)$.

Najprej določimo enačbo ravnine. Normala je

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-5, -11, -4),$$

kjer je $\vec{a} = \vec{AB} = (-3, 1, 1)$ in $\vec{b} = \vec{AC} = (4, 0, -5)$. Ker je $d = (-5, -11, -4) \cdot (0, 1, 3) = -23$, se enačba ravnine glasi

$$-5x - 11y - 4z = -23.$$

Nato določimo še enačbo premice, ki je pravokotna na ravnino in gre skozi točko T. V vektorski obliki je $\vec{r} = (-4, -9, -5) + t(-5, -11, -4)$, v parametrični obliki pa

$$x = -4 - 5t, \quad y = -9 - 11t \quad \text{in} \quad z = -5 - 4t.$$

Pravokotna projekcija točke je ravno presečišče ravnine in premice. Vstavimo parametrično izražavo enačbe premice v enačbo ravnine in dobimo vrednost parametra t

$$\begin{aligned} 20 + 25t + 99 + 121t + 20 + 16t &= -23 \\ t &= -1. \end{aligned}$$

Pravokotna projekcija je točka $S(1, 2, -1)$.

21. Katera točka na ravnini $3x + 4y - 2z - 29 = 0$ je najbližja koordinatnemu izhodišču?

Normala ravnine je $\vec{n} = (3, 4, -2)$. Točka na ravnini, ki je najbližja dani točki je presečišče ravnine in premice, ki je pravokotna na ravnino in gre skozi dano točko. Enačba te premice v parametrični obliki je $x = 3t$, $y = 4t$ in $z = -2t$. Le-to vstavimo v enačbo ravnine in dobimo $29t = 29$ oz. $t = 1$. Iskana točka je $S(3, 4, -2)$.

22. Dani sta ravnini $\pi_1 : 12x + 9y - 20z = 19$ in $\pi_2 : 16x - 12y + 15z = 9$. Določite točko, ki leži na osi z in je enako oddaljena od teh dveh ravnin.

Iščemo tako točko $T(0, 0, z)$, da velja $d(T, \pi_1) = d(T, \pi_2)$. Ker je

$$\begin{aligned} d(T, \pi_1) &= \left|\frac{-20z-19}{\sqrt{625}}\right| = \frac{|-20z-19|}{25}, \\ d(T, \pi_2) &= \left|\frac{15z-9}{\sqrt{625}}\right| = \frac{|15z-9|}{25}, \end{aligned}$$

rešujemo enačbo $|-20z - 19| = |15z - 9|$, ki ima dve rešitvi

i) prva rešitev: $-20z - 19 = 15z - 9 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{2}{7}$,
ii) druga rešitev: $-20z - 19 = -15z + 9 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{28}{5}$.

Dobimo dve točki $T_1(0, 0, -\frac{2}{7})$ in $T_2(0, 0, -\frac{28}{5})$.

23. Izračunajte razdaljo točk $A(0,0,0)$, $B(1,-1,0)$ in $C(3,5,4)$ do ravnine $\pi : 2x+3y+4z=-1$.

   i) $d(A,\pi) = \left|\frac{1}{\sqrt{4+9+16}}\right| = \frac{1}{\sqrt{29}}$,

   ii) $d(B,\pi) = \left|\frac{2-3+1}{\sqrt{29}}\right| = 0$, točka leži na ravnini,

   iii) $d(C,\pi) = \left|\frac{6+15+16+1}{\sqrt{29}}\right| = \frac{38}{\sqrt{29}}$.

24. Izračunajte oddaljenost točke $T(0,1,3)$ do premice $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$.

   Iz podatkov dobimo vektorje $\vec{e} = (2,1,2)$, $\vec{r}_0 = (1,-1,2)$, $\vec{r} = (0,1,3)$ in $\vec{r} - \vec{r}_0 = (-1,2,1)$. Sledi

$$\begin{aligned} \vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-4,5), \\ d(T,p) &= \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{9}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

25. Izračunajte oddaljenost točke $T(1,1,2)$ do premice $p : \frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{2}$.

   Iz podatkov dobimo vektorje $\vec{e} = (2,1,2)$, $\vec{r}_0 = (0,0,1)$, $\vec{r} = (1,1,2)$ in $\vec{r} - \vec{r}_0 = (1,1,1)$. Sledi

$$\begin{aligned} \vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,0,1), \\ d(T,p) &= \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

26. Izračunajte oddaljenost točk $A(0,0,0)$ in $B(2,2,0)$ od premice $p : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5}$.

   Iz podatkov dobimo vektorje $\vec{e} = (4,3,5)$, $\vec{r}_0 = (1,0,2)$, $\vec{r}_A = (0,0,0)$ in $\vec{r}_B = (2,2,0)$. Dolžina $|\vec{e}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Izračunajmo razdaljo najprej za točko A, kjer je $\vec{r}_A - \vec{r}_0 = (-1,0,-2)$

$$\begin{aligned} \vec{e} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_0) &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-6,3,3), \\ d(A,p) &= \frac{\sqrt{54}}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

   Nato še razdaljo za točko B, kjer je $\vec{r}_B - \vec{r}_0 = (1,2,-2)$

$$\begin{aligned} \vec{e} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_0) &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-16,13,5), \\ d(B,p) &= \frac{\sqrt{450}}{\sqrt{50}} = 3. \end{aligned}$$

27. Izračunajte razdaljo med premicama $p_1 : x-2 = 2y = z+1$ in $p_2 : x+1 = 2y = z-2$.

   Premici sta vzporedni s smernim vektorjem $\vec{e} = (1, \frac{1}{2}, 1)$. Razdalja med tema premicama je enaka razdalji ene točke na eni premici do druge premice. Ker je $\vec{r}_1 = (2,0,-1)$ in $\vec{r}_2 = (-1,0,2)$, je $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (3,0,-3)$. Vektorski produkt je enak

$$\vec{e} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-\tfrac{3}{2}, 6, -\tfrac{3}{2}),$$

   razdalja med premicama pa

$$d(p_1,p_2) = \frac{\sqrt{\frac{162}{4}}}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = 3\sqrt{2}.$$

28. Izračunajte razdaljo med premicama $p_1 : x = 2y = z$ in $p_2 : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{3}$.

Premici sta mimobežni. Iz podatkov dobimo vektorja $\vec{e}_1 = (1, \frac{1}{2}, 1)$ in $\vec{e}_2 = (2, 1, 3)$ ter točki $T_1(0, 0, 0)$ in $T_2(1, 0, -1)$. Sledi $\vec{r} = \vec{T_1T_2} = (1, 0, -1)$. Vektorski produkt je enak

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (\tfrac{1}{2}, -1, 0),$$

mešani produkt je $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{r}) = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{r} = (\frac{1}{2}, -1, 0) \cdot (1, 0, -1) = \frac{1}{2}$, dolžina vektorskega produkta je $|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, razdalja med premicama pa

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{r})|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|} = \tfrac{\sqrt{5}}{5}.$$

29. Izračunajte razdaljo med premicama $p_1 : x + 1 = y = \frac{z-1}{2}$ in $p_2 : x = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$.

Premici sta mimobežni. Iz podatkov dobimo vektorja $\vec{e}_1 = (1, 1, 2)$ in $\vec{e}_2 = (1, 3, 4)$ ter točki $T_1(-1, 0, 1)$ in $T_2(0, -1, 2)$. Sledi $\vec{r} = \vec{T_1T_2} = (1, -1, 1)$. Vektorski produkt je enak

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2, -2, 2),$$

mešani produkt je $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{r}) = (-2, -2, 2) \cdot (1, -1, 1) = 2$, razdalja med premicama pa

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{r})|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|} = \tfrac{2}{\sqrt{12}} = \tfrac{\sqrt{3}}{3}.$$

30. Določite zrcalno točko k točki $T(1, 1, 1)$ glede na premico $x = \frac{y-2}{-1}$, $z = 0$.

Iz podatkov dobimo $T_0(0, 2, 0)$, $\vec{e} = (1, -1, 0)$ in $T(1, 1, 1)$. Sledi

$$\begin{aligned} \vec{T_0T} &= (1, -1, 1), \\ \vec{T_0S} &= \tfrac{\vec{T_0T} \cdot \vec{e}}{|\vec{e}|^2} \vec{e} = \tfrac{2}{2}(1, -1, 0) = (1, -1, 0), \\ \vec{TS} &= \vec{T_0S} - \vec{T_0T} = (0, 0, -1), \\ \vec{r}' &= \vec{r} + 2\vec{TS} = (1, 1, 1) + 2(0, 0, -1) = (1, 1, -1). \end{aligned}$$

Zrcalna točka je $T'(1, 1, -1)$.

31. Določite zrcalno točko k točki $T(4, 2, 4)$ glede na ravnino $\pi : 2x + y + 2z = 9$.

Iz podatkov dobimo $\vec{n} = (2, 1, 2)$ in $T(4, 2, 4)$. Sledi

$$\begin{aligned} d(T, \pi) &= \tfrac{9}{\sqrt{9}} = 3, \\ \vec{TS} &= -d(T, \pi) \tfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 3 \cdot \tfrac{(2,1,2)}{3} = (2, 1, 2), \\ \vec{r}' &= \vec{r} + 2\vec{TS} = (4, 2, 4) + 2(-2, -1, -2) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Zrcalna točka je $T'(0, 0, 0)$.

MATRIKE

Matrika $A = [a_{ij}]_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,n}$ dimenzije $m \times n$ je pravokotna tabela mn števil, ki ima m vrstic in n stolpcev.
Z $A^T = [a_{ji}]_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,n}$ označimo transponirano matriko, ki jo dobimo tako, da zamenjamo vlogo stolpcev in vrstic. Veljajo zveze $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, $(A^T)^T = A$ in $(AB)^T = B^T A^T$. Z $A^* = \bar{A}^T$ označimo konjugirano matriko.
Množenje matrik: $A = [a_{ij}]_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,n}$, $B = [b_{ij}]_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,p}$, $C = [c_{ij}]_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,p}$,

$$C = A \cdot B, \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Za identiteto $I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ velja zveza $A \cdot I = I \cdot A = A$.

Matrika A je obrnljiva, če obstaja inverzna matrika A^{-1}, tako da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Če matrika ni obrnljiva, je singularna. Matrika A je nesingularna natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$. Velja

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T,$$

kjer je $\tilde{A}$ matrika kofaktorjev z elementi $\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$, A_{ij} pa determinanta matrike A brez i-te vrstice in j-tega stolpca.
Za determinante veljajo zveze $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ in $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
Rang $r(A)$ je enak številu linearno neodvisnih vrstic/stolpcev. Veljajo zveze $r(A) \leq \min\{m, n\}$ in $r(A) = r(A^T)$.

Operacije, ki ohranjajo rang (Gaussova eliminacija):

1. Dve vrstici lahko med seboj zamenjamo.
2. Vrstico lahko pomnožimo s poljubnim neničelnim številom.
3. Vrstici lahko prištejemo poljuben večkratnik druge vrstice.

Inverz izračunamo tako, da z operacijami, ki ohranjajo rang, prevedemo $[A|I] \rightsquigarrow [I|A^{-1}]$.

Ortogonalne in unitarne matrike:

Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je simetrična, če je $A^T = A$.
Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonalna, če je $AA^T = A^T A = I$.
Matrika $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je unitarna, če je $UU^* = U^* U = I$.

1. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Poiščite matriko X, za katero velja $2A - 3X = B$.

$$X = \frac{1}{3}(2A - B) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Izračunajte $3A + B^T$ in $2A^T + 3B$.

$$\begin{aligned} 3A + B^T &= \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 9 & 12 \\ -15 & -18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 14 & 10 \\ -21 & -15 \end{bmatrix}, \\ 2A^T + 3B &= \begin{bmatrix} -4 & 6 & -10 \\ 4 & 8 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 15 & -18 \\ 6 & -6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 21 & -28 \\ 10 & 2 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Za dano kompleksno matriko $A = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -3\mathrm{i} & -4+\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} & 6 & 7 & 2+6\mathrm{i} \end{bmatrix}$ izračunajte A^T in A^*.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 4 & -2-\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 2 & 6 \\ 4 & -3\mathrm{i} & 7 \\ 5 & -4+\mathrm{i} & 2+6\mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 4 & -2+\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 2 & 6 \\ 4 & 3\mathrm{i} & 7 \\ 5 & -4-\mathrm{i} & 2-6\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

4. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunajte produkta AB in BA.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}, \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Izračunajte produkta AB in BA.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6. Dane so matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ in $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte produkta AB in AC.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \\ AC &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -4 & -8 & -1 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7. Dana sta vektorja $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte produkta a^Tb in ba^T.

$$a^Tb = [1\ 2\ 3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6, \quad ba^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1\ 2\ 3] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Matriki A in B komutirata, če velja $AB = BA$. Ali lahko določimo parametra a in b tako, da matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} b & a & 5 \\ 9 & a & a \\ a & 8 & a \end{bmatrix}$ komutirata?

Izračunamo oba produkta

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & a & 5 \\ 9 & a & a \\ a & 8 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a+18 & 3a-8 & a+5 \\ 9+3a & a+24 & 4a \\ ab+4a+18 & a^2+2a+32 & 11a \end{bmatrix}, \\
BA &= \begin{bmatrix} b & a & 5 \\ 9 & a & a \\ a & 8 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+5a & 2b+a+10 & 3a-b+20 \\ a^2+9 & 3a+18 & 7a-9 \\ a^2+a & 4a+8 & 3a+24 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Matriki sta enaki, če imata vse istoležne elemente enake. Ker sta neznanki dve, vzamemo tudi dve enačbi, lahko kar enačimo prva dva elementa v prvi vrstici in dobimo sistem

$$
\begin{aligned}
b-a+18 &= b+5a, \\
3a-8 &= 2b+a+10,
\end{aligned}
$$

ki ima rešitev $a = 3$ in $b = -6$. Vendar pa ta rešitev ni dobra za vse enačbe, zato taka parametra a in b, da bi matriki A in B komutirali, ne obstajata.

9. Poiščite vse matrike, ki komutirajo z matriko $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Izračunamo oba produkta matrike A s poljubno matriko $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}, \\
BA &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a+b \\ d & c+d \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Da matriki komutirata, mora biti $AB = BA$, torej morajo biti vsi istoležni elementi enaki. Dobimo enačbe $c = b$, $a + c = d$, $a + b = d$ in $b + d = c + d$, ki se reducirajo v $c = b$ in $d = a + b$. Matrike, ki komutirajo z matriko A, so oblike

$$
B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a+b \end{bmatrix}.
$$

10. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ter funkcija $f(x) = x^5+2x^4-x^3+5x^2+8$. Izračunajte $f(A)$ in $f(B)$.

Izračunamo najprej za matriko A

$$
\begin{aligned}
A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \\
A^4 &= A^5 = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad f(A) = A^5 + 2A^4 - A^3 + 5A^2 + 8I = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.
$$

Nato še za matriko B

$$\begin{aligned}
B^2 &= B\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
B^3 &= B^2\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
B^4 &= B^3\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
B^5 &= B^4\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\Rightarrow &\qquad f(B) = B^5 + 2B^4 - B^3 + 5B^2 + 8I = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 40 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

11. Ali je matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonalna?

Ker je

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq I,$$

matrika A ni ortogonalna.

12. Ali je matrika $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ortogonalna?

Ker je

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

in $A^TA = I$, je matrika A ortogonalna.

13. Ali je matrika $U = \begin{bmatrix} \frac{-1+2\mathrm{i}}{5} & \frac{-4-2\mathrm{i}}{5} \\ \frac{2-4\mathrm{i}}{5} & \frac{-2-\mathrm{i}}{5} \end{bmatrix}$ unitarna?

Ker je

$$UU^* = \begin{bmatrix} \frac{-1+2\mathrm{i}}{5} & \frac{-4-2\mathrm{i}}{5} \\ \frac{2-4\mathrm{i}}{5} & \frac{-2-\mathrm{i}}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1-2\mathrm{i}}{5} & \frac{2+4\mathrm{i}}{5} \\ \frac{-4+2\mathrm{i}}{5} & \frac{-2+\mathrm{i}}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

in $U^*U = I$, je matrika U unitarna.

14. Ali je matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ obrnljiva?

Matrika A ni obrnljiva, saj sta prvi in drugi stolpec enaka (tudi tretji in četrti), kar pomeni, da je determinanta matrike A enaka 0.

15. Poiščite inverze k danim matrikam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ in $C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

    Inverze izračunamo po formuli $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T$, ki se za 2×2 matrike poenostavi v

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

    S konkretnimi podatki dobimo

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

    Matrika C je zanimiva zato, ker množenje poljubnega vektorja s to matriko pomeni rotacijo vektorja za kot α.

16. Z matriko kofaktorjev izračunajte inverz matrike $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix}$.

    Izračunamo determinanto matrike in matriko kofaktorjev

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 6, \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 4 \\ -56 & 22 & 26 \\ 32 & -13 & -14 \end{bmatrix}.$$

    Inverzna matrika je

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -10 & -56 & 32 \\ 5 & 22 & -13 \\ 4 & 26 & -14 \end{bmatrix}.$$

17. Z matriko kofaktorjev izračunajte inverz matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

    Izračunamo determinanto matrike in matriko kofaktorjev

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

    Inverzna matrika je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

18. Določite rang matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 8 & -6 \\ 3 & -3 & 11 & -2 \end{bmatrix}$.

    Z operacijami, ki ohranjajo rang, "pridelamo" v vsaki vrstici vsaj eno ničlo več kot je v prejšnji vrstici

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 8 & -6 \\ 3 & -3 & 11 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 3 & 2 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

    Rang matrike je enak številu vrstic, ki nimajo vseh elementov enakih 0. Torej je $r(A) = 2$.

19. Določite rang matrike $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & 7 \\ -7 & 1 & -9 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & 7 \\ -7 & 1 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -6 & -30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2.$$

20. Določite rang matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 4 & -9 & 13 \\ -1 & 3 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 4 & -9 & 13 \\ -1 & 3 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -9 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad r(A) = 3.$$

21. Poiščite število k, pri katerem ima matrika $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ k & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ najmanjši rang.

Z operacijami, ki ohranjajo rang, reduciramo matriko A

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ k & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ k & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & 4-7k & 10-17k & 1-3k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7k & 17k & 3k \end{bmatrix}.$$

Ločimo dva primera. Če je $k = 0$, potem je $r(A) = 2$, sicer pa je $r(A) = 3$. Torej ima matrika A najmanjši rang pri $k = 0$.

22. Določite rang matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & p & 7 & 7 \end{bmatrix}$ v odvisnosti od parametra p.

Z operacijami, ki ohranjajo rang, reduciramo matriko A

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & p & 7 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & -2 \\ 0 & p+3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & -2 \\ 0 & p-4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ločimo dva primera. Če je $p = 4$, potem je $r(A) = 2$, sicer pa je $r(A) = 3$.

23. Z Gaussovo eliminacijo izračunajte inverz matrike $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriko A razširimo z identiteto I. Z operacijami, ki ohranjajo rang, razširjeno matriko predelamo tako, da na mestu, kjer je bila matrika A, dobimo matriko I, na mestu, kjer je bila matrika I, pa dobimo inverzno matriko A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

24. Z Gaussovo eliminacijo izračunajte inverz matrike $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ -8 & 3 & 10 \end{bmatrix}$.

Sestavimo razširjeno matriko in jo predelamo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & -8 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & -6 & 15 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

25. Z Gaussovo eliminacijo izračunajte inverz matrike $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Inverzna matrika je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 18 & -6 & -5 \\ 7 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

Dan je sistem m enačb z n neznankami

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\vdots \qquad\qquad &= \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

Sistem zapišemo v matrični obliki $Ax = b$. Sestavimo razširjeno matriko $R = [A|b]$ in uporabimo Gaussovo eliminacijo na tej matriki. Uporabljamo operacije, ki ohranjajo rang matrike. Velja

1. Sistem $Ax = b$ je protisloven (nima rešitve), če je $r(A) \neq r(R)$.
2. Sistem $Ax = b$ je rešljiv natanko tedaj, ko je $r := r(A) = r(R)$.
   (a) Če je $r = n$, je rešitev natanko ena.
   (b) Če je $r < n$, je rešitev neskončno, dobimo $(n-r)$-parametrično družino rešitev.

Homogen sistem linearnih enačb: $Ax = 0$

1. Trivialna rešitev $x = (0, 0, \ldots, 0)^T$ vedno obstaja.
2. Kvadratni sistem ima netrivialno rešitev natanko tedaj, ko je $\det A = 0$.
3. Če je $m < n$, netrivialna rešitev vedno obstaja.

Matrične enačbe:

Enačbo $Ax = b$ rešimo tako, da z operacijami, ki ohranjajo rang, prevedemo: $[A|b] \rightsquigarrow [I|x]$.

Enačbo $AX = B$ rešimo tako, da z operacijami, ki ohranjajo rang, prevedemo: $[A|B] \rightsquigarrow [I|X]$.

Enačbo $XA = B$ najprej transponiramo, da dobimo enačbo $A^T X^T = B^T$ prejšnje oblike. Le-to rešimo tako, da prevedemo $[A^T|B^T] \rightsquigarrow [I|X^T]$.

1. Rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}
2x - 3y + z &= 0, \\
x - 2y + 3z &= 0, \\
x + y + z &= 13.
\end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko sistema in jo z operacijami, ki ohranjajo rang, reduciramo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{array}\right].$$

Ranga matrike in razširjene matrike sta enaka, torej rešitev obstaja. Ker je rang enak številu neznank, je rešitev natanko ena. Poiščemo jo tako, da enačbe rešujemo od spodaj navzgor. Dobimo $13z = 13$, torej $z = 1$, $y - 5z = 0$, zato $y = 5$ in $x - 2y + 3z = 0$, zato $x = 7$.

2. Rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}
2x + 3y - 2z &= 5, \\
x - 2y + 3z &= 2, \\
4x - y + 4z &= 1.
\end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko in jo z operacijami, ki ohranjajo rang, reduciramo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right].$$

Ker je rang razširjene matrike enak 3, rang osnovne matrike pa 2, sistem nima rešitve.

3. Rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 2, \\ x + 2y - 3z &= 3, \\ x + y + 5z &= -1. \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko in jo z operacijami, ki ohranjajo rang, reduciramo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ranga razširjene matrike in osnovne matrike sta enaka, torej rešitev obstaja. Ker je rang enak 2, neznanke pa so 3, je rešitev neskončno. Vzamemo npr. $z =$ poljuben in z njim izrazimo x in y. Ker je $y - 8z = 4$, je $y = 8z + 4$, in ker je $x + y + 5z = -1$, je $x = -13z - 5$.

4. Rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3u - v &= 5, \\ x + 2y + z + 5u - v &= 5, \\ -x + y - 4z + 2u &= -3, \\ 2x - y + 7z - 2u &= 6. \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko in jo z operacijami, ki ohranjajo rang, reduciramo

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -8 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ker sta ranga osnovne in razširjene matrike enaka, rešitev obstaja. Rang je 3, neznank pa 5, torej dobimo 2-parametrično družino rešitev $x = -3z+3$, $y = z-2v-4$, $z =$ poljuben, $u = v+2$, $v =$ poljuben.

5. Določite parameter k tako, da bo sistem rešljiv

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0, \\ 3x - y - z &= -2, \\ 4x - y - 2z &= k. \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko in jo z operacijami, ki ohranjajo rang, reduciramo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k+3 \end{array}\right].$$

Sistem je rešljiv, ko sta ranga enaka, torej ko je $k+3 = 0$. Zato ima sistem rešitev pri $k = -3$, leteh pa je neskončno, saj je rang 2, neznanke pa so 3. Enoparametrična družina rešitev: $x = z-1$, $y = 2z - 1$, $z =$ poljuben.

6. Obravnavajte rešljivost sistema glede na vrednosti parametra k

$$\begin{aligned} kx + 2y + 3z &= 4, \\ 2x + y - z &= 3, \\ 3x + 3y + 2z &= 10. \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko in jo z operacijami, ki ohranjajo rang, reduciramo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 10 \\ k & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & 4-k & 6+k & 8-3k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 5k-5 & k-10 \end{array}\right].$$

Obravnavamo primere:

- $k = 1$: sistem nima rešitve,
- $k \neq 1$: sistem ima natanko eno rešitev $x = \dfrac{3}{1-k}, \quad y = \dfrac{5+16k}{5k-5}, \quad z = \dfrac{k-10}{5k-5}$.

7. (♣) Obravnavajte rešljivost sistema glede na vrednosti parametra k

$$\begin{aligned} x - 3z &= -3, \\ 2x + ky - z &= -2, \\ x + 2y + kz &= 1. \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko in jo z operacijami, ki ohranjajo rang, reduciramo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 0 & (k+5)(k-2) & 4(k-2) \end{array}\right].$$

Obravnavamo primere:

- $k = -5$: sistem nima rešitve,
- $k = 2$: sistem ima neskončno rešitev $x = -3 + 3t, \quad y = 2 - \dfrac{5}{2}t, \quad z = t$,
- $k = 0$: sistem ima neskončno rešitev $x = -\dfrac{3}{5}, \quad y = t, \quad z = \dfrac{4}{5}$,
- $k \neq -5$, $k \neq 2$, $k \neq 0$: sistem ima natanko eno rešitev

$$x = \frac{-3k-3}{k+5}, \quad y = \frac{4}{k+5}, \quad z = \frac{4}{k+5}.$$

8. (♣) Obravnavajte rešljivost sistema glede na vrednosti parametra k

$$\begin{aligned} -3x + (2-k)y + (k-2)z &= 3k - 7, \\ x - y + 6z &= 5, \\ x + ky - 6kz &= 2 - 3k. \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko in jo z operacijami, ki ohranjajo rang, reduciramo

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 6 & 5 \\ 1 & k & -6k & 2-3k \\ -3 & 2-k & k-2 & 3k-7 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & k+1 & -6k-6 & -3-3k \\ 0 & -1-k & k+16 & 3k+8 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & k+1 & -6k-6 & -3-3k \\ 0 & 0 & -5k+10 & 5 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Obravnavamo primere:

- $k = 2$: sistem nima rešitve,
- $k = -1$: sistem ima neskončno rešitev $x = 3 + t, \quad y = t, \quad z = \frac{1}{3}$,
- $k \neq 2$, $k \neq -1$: sistem ima natanko eno rešitev

$$x = 2, \quad y = \frac{3k}{2-k}, \quad z = \frac{1}{2-k}.$$

9. Kateremu pogoju morajo zadoščati parametri a, b in c, da bo sistem enačb

$$\begin{aligned} 2x - 7y - 7z &= a \\ -x + 2y + 3z &= b \\ x + y - 2z &= c \end{aligned}$$

rešljiv? Rešite sistem za vrednosti parametrov $a = -12$, $b = 7$ in $c = -9$.

Zapišemo razširjeno matriko, kjer zamenjamo prvo in tretjo enačbo, ter jo reduciramo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ -1 & 2 & 3 & b \\ 2 & -7 & -7 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ 0 & 3 & 1 & b+c \\ 0 & -9 & -3 & a-2c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ 0 & 3 & 1 & b+c \\ 0 & 0 & 0 & a+3b+c \end{array}\right].$$

Da bo sistem rešljiv, mora biti izpolnjen pogoj

$$a + 3b + c = 0.$$

Dane vrednosti $a = -12$, $b = 7$ in $c = -9$ temu pogoju zadoščajo, torej ima sistem rešitev. Ker je rang za 1 manjši od števila neznank, dobimo 1-parametrično družino rešitev: $x = -7y - 13$, $y =$ poljuben, $z = -3y - 2$.

10. Ali ima homogen sistem

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ x - 8y + 8z &= 0 \\ 3x - 2y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

netrivialno rešitev? Če jo ima, jo izračunajte.

Ker je $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, ima homogen sistem netrivialno rešitev, ki jo dobimo podobno kot pri nehomogenem sistemu z redukcijo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 10 \\ 0 & -11 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je rang enak 2, neznanke pa 3, dobimo 1-parametrično družino rešitev: $x = -\frac{8}{11}z$, $y = \frac{10}{11}z$, $z =$ poljuben.

11. Rešite enačbo $Ax = b$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Najprej sestavimo razširjeno matriko in jo predelujemo toliko časa, da dobimo na levi strani identiteto. Takrat je na desni strani rešitev sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 7 & 5 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Rešitev je $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

12. Rešite matrično enačbo $AX = B$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Rešitev obstaja, če je determinanta matrike A različna od 0, sicer pa ne. Ker je

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dana matrična enačba nima rešitve.

13. Rešite matrično enačbo $AX = B$, kjer je $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ker je $\det A \neq 0$, rešitev obstaja in je enaka $X = A^{-1}B$. Poiščemo jo tako, da sestavimo razširjeno matriko iz matrik A (na levi) in B (na desni). To matriko predelujemo toliko časa, da dobimo na levi identiteto. Na desni je tedaj rešitev X

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

14. Rešite matrično enačbo $XA = B$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ker je $\det A \neq 0$, rešitev obstaja in je enaka $X = BA^{-1}$. Poiščemo jo tako, da sestavimo razširjeno matriko iz matrik A^T (na levi) in B^T (na desni). To matriko predelujemo toliko časa, da dobimo na levi identiteto. Na desni je tedaj X^T

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Rešitev matrične enačbe je

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. (♣) Rešite matrično enačbo $XA = B$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 9 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 14 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 16 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 14 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 19 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 26 & 18 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 13 & -24 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 19 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

VEKTORSKI PROSTORI IN LINEARNE PRESLIKAVE

Množica vektorjev $x_1, \ldots, x_n \in V$ je linearno neodvisna, če je linearna kombinacija $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ natanko tedaj, ko je $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Linearna ogrinjača vektorjev $x_1, \ldots, x_n \in V$ je množica vseh vektorjev oblike $y = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, ki so linearno odvisni od vektorjev $x_1, \ldots, x_n$.

Baza vektorskega prostora V je množica vseh linearno neodvisnih vektorjev, katerih linearna ogrinjača je cel prostor V. Število vektorjev v bazi je enako dimenziji vektorskega prostora.

Standardna baza v prostoru $\mathbb{R}^n$ je

$$e_1 = [1, 0, \ldots, 0]^T, \ldots, e_n = [0, 0, \ldots, 1]^T.$$

Preslikava $T : U \to V$ je linearna preslikava med vektorskima prostoroma U in V, če velja

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y.$$

Bazni vektorji $e_1, \ldots, e_n$ prostora U se z linearno preslikavo T preslikajo v bazne vektorje $Te_1, \ldots, Te_n$ prostora V. Linearno preslikavo predstavimo z matriko.

1. Ali so vektorji $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ linearno neodvisni?

   Vektorji v_1, v_2 in v_3 so linearno neodvisni, če je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ edina rešitev enačbe $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. To je homogen sistem enačb, za katerega vemo, da ima netrivialno rešitev, ko je determinanta matrike sistema enaka 0. Vektorji so torej linearno neodvisni, ko ima matrika, katere stolpci so ti vektorji, determinanto različno od 0. Ker je

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

   so vektorji linearno neodvisni.

2. Ali so vektorji $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix}$ linearno neodvisni?

   Ker je

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 0,$$

   so vektorji linearno odvisni.

3. Dani so vektorji $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. Določite parameter λ tako, da bo vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ \lambda \end{bmatrix}$ v njihovi linearni ogrinjači.

   Vektor u je v linearni ogrinjači vektorjev v_1, v_2 in v_3, če obstajajo taki α, β in γ, da je $u = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. To nam da nehomogen sistem enačb, ki ga rešimo z Gaussovo eliminacijo. Koeficienti α, β in γ obstajajo, ko ima sistem rešitev. Reduciramo in dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & \lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & \lambda - 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 1 \end{array}\right].$$

   Sistem ima rešitev, ko je $\lambda + 1 = 0$, torej ko je $\lambda = -1$.

4. Pokažite, da vektorji $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ tvorijo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Razvijte vektor $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$ po tej bazi.

   Vektorji tvorijo bazo, ko so linearno neodvisni in napenjajo cel prostor. V prostoru $\mathbb{R}^3$ poljubna trojica linearno neodvisnih vektorjev sestavlja bazo. Ker je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

   so vektorji linearno neodvisni, torej baza prostora $\mathbb{R}^3$.
   Iščemo take koeficiente α, β in γ, da bo $y = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$. Potrebno je rešiti nehomogen sistem enačb, katerega rešitve so iskani koeficienti. Rešitev bo natanko ena, saj se da vsak vektor na natanko en način zapisati kot linearno kombinacijo baznih vektorjev. Reduciramo in dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

   Sistem ima rešitev $\alpha = 1$, $\beta = 2$ in $\gamma = 3$, kar pomeni $y = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

5. Pokažite, da vektorji $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tvorijo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Razvijte vektor $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ po tej bazi.

   Ker je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

   so vektorji linearno neodvisni, torej baza prostora $\mathbb{R}^3$. Reduciramo in dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

   Sistem ima rešitev $\alpha = 1$, $\beta = 1$ in $\gamma = 1$, kar pomeni $y = x_1 + x_2 + x_3$.

6. Določite sliko vektorja $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ z linearno preslikavo, ki je podana z matriko $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

   Sliko vektorja dobimo kot produkt matrike, ki pripada linearni preslikavi, z vektorjem

$$y = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

7. Linearna preslikava preslika standardne bazne vektorje v vektorje $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

   V kateri vektor se preslika vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$?

Sestavimo matriko A, ki pripada linearni preslikavi. To je matrika, ki ima za stolpce slike baznih vektorjev

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Preslikan vektor je

$$y = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

8. Dan je vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$. Preslikava T preslika vektor $\vec{v}$ v vektor $\vec{a} \times \vec{v}$. Dokažite, da je preslikava T linearna in poiščite njeno matriko v standardni bazi. Kam se s to preslikavo slika vektor $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$? Kateri vektor se slika v vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$?

Najprej pokažimo po definiciji, da je T linearna preslikava

$$\begin{aligned} T(\alpha\vec{v} + \beta\vec{u}) &= \vec{a} \times (\alpha\vec{v} + \beta\vec{u}) = \vec{a} \times (\alpha\vec{v}) + \vec{a} \times (\beta\vec{u}) \\ &= \alpha(\vec{a} \times \vec{v}) + \beta(\vec{a} \times \vec{u}) = \alpha T(\vec{v}) + \beta T(\vec{u}). \end{aligned}$$

Matriko T, ki pripada linearni preslikavi, dobimo tako, da preslikamo standardne bazne vektorje

$$\begin{aligned} T(\vec{e}_1) &= \vec{a} \times \vec{e}_1 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \\ T(\vec{e}_2) &= \vec{a} \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ T(\vec{e}_3) &= \vec{a} \times \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrika T je sestavljena iz stolpcev slik standardnih baznih vektorjev

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ se preslika v vektor $\begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ -17 \end{bmatrix}$, vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ pa je slika neskončno vektorjev oblike $\begin{bmatrix} -1-2t \\ 1-5t \\ t \end{bmatrix}$.

9. (♣) Dokažite, da je preslikava $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ y+x \end{bmatrix}$ linearna. Poiščite matriko te linearne preslikave ter sliko vektorja $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Najprej pokažimo po definiciji, da je T linearna preslikava

$$T\left(\alpha\begin{bmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} x_2\\ y_2\\ z_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\alpha(y_1+z_1)+\beta(y_2+z_2)\\ \alpha(x_1+z_1)+\beta(x_2+z_2)\\ \alpha(y_1+x_1)+\beta(y_2+x_2)\end{bmatrix}=\alpha T\left(\begin{bmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}\right)+\beta T\left(\begin{bmatrix} x_2\\ y_2\\ z_2\end{bmatrix}\right)$$

Stolpci matrike T so slike standardnih baznih vektorjev

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow T=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

Preslikan vektor je

$$y=Tx=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}.$$

10. (♣) Poiščite matriko linearne preslikave, ki preslika vektorje $\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}-1\\4\\3\end{bmatrix}$ v vektorje $\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$.

Iščemo rešitev matrične enačbe $XA=B$, kjer sta matriki A in B dobljeni iz danih vektorjev

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&3&4\\3&2&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}7&5&1\\2&3&3\\1&4&0\end{bmatrix}.$$

Z redukcijo razširjene matrike iz A^T in B^T dobimo na desni X^T

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&7&2&1\\-1&3&2&5&3&4\\-1&4&3&1&3&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&7&2&1\\0&4&5&12&5&5\\0&5&6&8&5&1\end{array}\right]\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}4&0&7&16&3&-1\\0&4&5&12&5&5\\0&0&-1&-28&-5&-21\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}4&0&0&-180&-32&-148\\0&4&0&-128&-20&-100\\0&0&1&28&5&21\end{array}\right]\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-45&-8&-37\\0&1&0&-32&-5&-25\\0&0&1&28&5&21\end{array}\right]\qquad\Rightarrow\qquad X=\begin{bmatrix}-45&-32&28\\-8&-5&5\\-37&-25&21\end{bmatrix}.$$

LASTNE VREDNOSTI IN LASTNI VEKTORJI

Lastne vrednosti matrike A so ničle karakterističnega polinoma matrike A

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ, je neničelni vektor $x \neq 0$, da velja $Ax = \lambda x$.
Lastni vektorji so netrivialne rešitve homogenega sistema $(A - \lambda I)x = 0$.

1. Poiščite lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

   Lastne vrednosti matrike A so rešitve enačbe

   $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0.$$

   Dobimo dve različni lastni vrednosti $\lambda_1 = 5$ in $\lambda_2 = -1$. Izračunamo še pripadajoča lastna vektorja tako, da rešimo homogen sistem linearnih enačb

   i) $\lambda_1 = 5$:

   $$A - \lambda_1 I = A - 5I = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   ii) $\lambda_2 = -1$:

   $$A - \lambda_2 I = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Poiščite lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

   Ker je

   $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0,$$

   dobimo lastne vrednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ in $\lambda_3 = 3$. Pripadajoči lastni vektorji so

   i) $\lambda_1 = 1$:

   $$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   ii) $\lambda_2 = 2$:

   $$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   iii) $\lambda_3 = 3$:

   $$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Izračunajte lastne vrednosti in tisti lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti največji lastni vrednosti, matrike

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(2+\lambda)^2=0,$$

dobimo lastne vrednosti $\lambda_1 = 4$ in $\lambda_{2,3} = -2$. Absolutno največja je prva lastna vrednost ($\lambda_1 = 4$) in k njej izračunajmo pripadajoči lastni vektor

$$A-4I=\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & -12 & 6 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad x_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4. Poiščite lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ker je

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-(1+\lambda)(1+\lambda^2)=0$$

dobimo lastne vrednosti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$ in $\lambda_3 = -\mathrm{i}$. Pripadajoči lastni vektorji so

i) $\lambda_1 = -1$:

$$A+I=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad x_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

ii) $\lambda_2 = \mathrm{i}$:

$$A-\mathrm{i}I=\begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & -1 & -1 \\ 1 & -1-\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & -1-\mathrm{i} \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & -1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad x_2=\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

iii) $\lambda_3 = -\mathrm{i}$:

$$A+\mathrm{i}I=\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & -1 & -1 \\ 1 & -1+\mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & -1+\mathrm{i} \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & -1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad x_3=\begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Določite parameter k tako, da bo 0 lastna vrednost matrike $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & k \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

Ker je

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & k \\ 0 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+4\lambda^2-(4k+1)\lambda-6-8k=0$$

je 0 lastna vrednost, ko je karakteristični polinom deljiv z λ, torej ko je $-6-8k=0$. Zato je $k=-\frac{3}{4}$.

6. Določite parametra α in β tako, da bo $x=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ lastni vektor matrike $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 \\ 1 & -2 & \beta \end{bmatrix}$.

Iz matrične enačbe $Ax=\lambda x$, kjer je λ pripadajoča lastna vrednost, dobimo sistem enačb $-\alpha=\lambda$, $\alpha-1=\lambda$ in $-1-\beta=-\lambda$, ki ima rešitev $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{3}{2}$ in $\lambda=-\frac{1}{2}$. Lastni vektor x pripada lastni vrednosti $\lambda=-\frac{1}{2}$.

POTENČNA IN TAYLORJEVA VRSTA

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

Konvergenčni polmer R potenčne vrste je

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Potenčna vrsta je enakomerno in absolutno konvergentna, če je $|x-a| < R$, in divergentna, če je $|x-a| > R$. Če je $|x-a| = R$, konvergenco preverimo kot konvergenco številske vrste.

<u>Razvoj funkcije f v Taylorjevo vrsto okrog točke a:</u>

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Razvoji elementarnih funkcij okrog točke $a = 0$:

i) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad |x| < \infty.$

ii) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad |x| < \infty.$

iii) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad |x| < \infty.$

iv) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; \quad |x| < 1.$

v) Binomska formula:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n; \quad |x| < 1; \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!}.$$

vi) Geometrijska vrsta:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \quad |x| < 1.$$

1. Določite območje konvergence naslednjih potenčnih vrst.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+4}$

To je potenčna vrsta z $a = 0$ in $a_n = \frac{1}{n+4}$. Izračunamo konvergenčni polmer

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n+4} = 1.$$

Vrsta zagotovo konvergira na odprtem intervalu $(-1, 1)$. Preverimo še konvergenco v krajiščih. Za $x = -1$ dobimo alternirajočo vrsto, katere koeficienti padajo proti 0, torej ta vrsta konvergira. Za $x = 1$ dobimo harmonično vrsto, ki je divergentna. Območje konvergence je interval $[-1, 1)$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n} x^n$

To je potenčna vrsta z $a = 0$ in $a_n = \frac{n!}{5^n}$. Izračunamo konvergenčni polmer

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot 5^{n+1}}{5^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0.$$

Ker je konvergenčni polmer enak 0, lahko vrsta konvergira samo v točki $x = 0$, kar pa, saj dobimo vrsto iz samih ničel. Območje konvergence je $\{0\}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$

To je potenčna vrsta z $a = 0$ in $a_n = \frac{3^n}{n!}$. Izračunamo konvergenčni polmer

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot (n+1)!}{3^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = \infty.$$

Ker je konvergenčni polmer enak ∞, vrsta konvergira na celi množici realnih števil $\mathbb{R}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (x-1)^n$

To je potenčna vrsta z $a = 1$ in $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Izračunamo konvergenčni polmer

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2 + 2n + 1} = 2.$$

Vrsta zagotovo konvergira na odprtem intervalu $(-1, 3)$. Preverimo še konvergenco v krajiščih. Za $x = -1$ dobimo alternirajočo vrsto, katere koeficienti pa ne padajo proti 0, torej ta vrsta divergira. Za $x = 3$ dobimo vsoto kvadratov naravnih števil, ki je divergentna. Območje konvergence je interval $(-1, 3)$.

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-3)^n$

To je potenčna vrsta z $a = 3$ in $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Izračunamo konvergenčni polmer

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot (n+2)}{(n+1) \cdot (-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1.$$

Vrsta zagotovo konvergira na odprtem intervalu $(2, 4)$. Preverimo konvergenco v krajiščih. Za $x = 2$ dobimo harmonično vrsto, ki je divergentna. Za $x = 4$ dobimo alternirajočo vrsto, katere koeficienti padajo proti 0, torej ta vrsta konvergira. Območje konvergence je interval $(2, 4]$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{2n-1}}$

To je potenčna vrsta z $a = -\frac{1}{2}$ in $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{2n-1}}$. Izračunamo konvergenčni polmer

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n \cdot \sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1} \cdot 2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2}.$$

Vrsta zagotovo konvergira na odprtem intervalu $(-1, 0)$. Preverimo še konvergenco v krajiščih. Za $x = -1$ dobimo alternirajočo vrsto, katere koeficienti padajo proti 0, torej ta vrsta konvergira. Za $x = 0$ dobimo vrsto tipa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, ki je divergentna. Območje konvergence je interval $[-1, 0)$.

2. Razvijte naslednje funkcije v Taylorjevo vrsto okrog $a = 0$ in določite območje konvergence.

   a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

   Uporabimo formulo za razvoj eksponentne funkcije in dobimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n.$$

   Območje konvergence je $|x| < \infty$.

   b) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$

   Uporabimo formulo za razvoj eksponentne funkcije in dobimo

$$f(x) = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n!}.$$

   Območje konvergence je $|x| < \infty$.

   c) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$

   Uporabimo formulo za razvoj funkcije sinus in dobimo

$$f(x) = 1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 - \frac{4}{315}x^6 \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

   Območje konvergence je $|x| < \infty$.

3. Razvijte funkcijo $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ v Taylorjevo vrsto okrog $a = 0$ in določite območje konvergence.

   Racionalno funkcijo razbijemo na parcialne ulomke

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - 2A - 3B}{x^2-5x+6}.$$

   Sledi, da je $A = 1$ in $B = -1$. Izraz preoblikujemo in uporabimo geometrijsko vrsto

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n. \end{aligned}$$

   Območje konvergence je $|x| < 2$.

4. Razvijte funkcijo $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ v Taylorjevo vrsto okrog $a = 2$ in določite območje konvergence.

   Najprej napravimo substitucijo $y = x - 2$, oz. $x = y + 2$, da dobimo funkcijo $g(y) = \frac{y+2}{y^2+4y+3}$, ki jo razvijemo okrog točke 0. Razbitje na parcialne ulomke

$$\frac{y+2}{y^2+4y+3} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+3} = \frac{(A+B)y + 3A + B}{y^2+4y+3},$$

   da koeficienta $A = \frac{1}{2}$ in $B = \frac{1}{2}$. Izraz preoblikujemo in uporabimo geometrijsko vrsto

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-y)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{y}{3})}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-y)^n + \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{y}{3}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3^{n+1}+1)}{2 \cdot 3^{n+1}} y^n. \end{aligned}$$

Nato uporabimo obratno substitucijo in dobimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3^{n+1}+1)}{2\cdot 3^{n+1}}(x-2)^n.$$

Območje konvergence je $|x-2|<1$.

5. Razvijte funkcijo $f(x) = \frac{x}{x^2+3x+2}$ v Taylorjevo vrsto okrog $a=1$ in določite območje konvergence.

   Najprej napravimo substitucijo $y = x-1$, oz. $x = y+1$, da dobimo funkcijo $g(y) = \frac{y+1}{y^2+5y+6}$, ki jo razvijemo okrog točke 0. Razbitje na parcialne ulomke

$$\frac{y+1}{y^2+5y+6} = \frac{A}{y+2} + \frac{B}{y+3} = \frac{(A+B)y+3A+2B}{y^2+4y+3},$$

   da koeficienta $A=-1$ in $B=2$. Izraz preoblikujemo in uporabimo geometrijsko vrsto

$$\begin{aligned} g(y) &= -\frac{1}{y+2} + \frac{2}{y+3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{y}{3})} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{y}{2})} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{y}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{y}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)y^n. \end{aligned}$$

   Nato uporabimo obratno substitucijo in dobimo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n.$$

   Območje konvergence je $|x-1|<2$.

6. Razvijte funkcijo $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ v Taylorjevo vrsto okrog $a=0$ in določite območje konvergence.

   Funkcijo preoblikujemo in uporabimo binomsko formulo

$$f(x) = x^2\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{3}{2}}{n}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{3}{2}}{n}x^{2n+2}.$$

   Območje konvergence je $|x|<1$.

7. Razvijte funkciji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $g(x) = \arcsin x$ v Taylorjevo vrsto okrog $a=0$.

   Funkcijo f najprej razvijmo podobno kot v prejšnji nalogi

$$f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}.$$

   Nato opazimo, da velja $g'(x) = f(x)$. Zato dobimo Taylorjev razvoj za funkcijo g tako, da členoma integriramo Taylorjev razvoj za funkcijo f: $g(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C$

$$g(x) = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\int x^{2n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

   Izkaže se, da je konstanta $C=0$, ker je $g(0)=0$.

8. (♣) Razvijte funkcijo $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ v Taylorjevo vrsto okrog $a=0$.

   Uporabimo metodo iz prejšnjega primera in najprej razvijemo v Taylorjevo vrsto odvod

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}.$$

Nato odvod členoma integriramo. Ker je $f(0) = 0$, je konstanta $C = 0$

$$f(x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \int x^{2n} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

9. Razvijte funkcijo $f(x) = \frac{1}{x^3}$ v Taylorjevo vrsto okrog $a = 1$ in določite območje konvergence.

   To funkcijo razvijemo po definiciji. Izračunamo prvih nekaj odvodov: $f(x) = x^{-3}$, $f'(x) = -3x^{-4}$, $f''(x) = 3 \cdot 4x^{-5}$, $f'''(x) = -3 \cdot 4 \cdot 5x^{-6}$, ... Sledi izraz za n-ti odvod

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+2)!}{2} x^{-(n+3)}.$$

   Ker je $f^{(n)}(1) = (-1)^n \frac{(n+2)!}{2}$, je Taylorjeva vrsta za dano funkcijo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)!}{2n!} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)}{2} (x-1)^n$$

   Območje konvergence je $|x - 1| < 1$.

10. Z uporabo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunajte naslednje limite.

    a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - 2\sin(\frac{x}{2})}{1 + 2x - e^{2x}} &= \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \cdots - x + \frac{x^3}{24} \mp \cdots}{1 + 2x - 1 - 2x - 2x^2 - \frac{4x^3}{3} - \cdots} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{8} \pm \cdots}{-2x^2 - \frac{4x^3}{3} - \cdots} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3x}{8} \pm \cdots}{-2 - \frac{4x}{3} - \cdots} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

    Namesto logaritemske, sinusne in eksponentne funkcije napišemo nekaj členov razvoja v Taylorjevo vrsto.

    b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^3} - 1}{x^2 \ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^3 + \frac{x^6}{2} \pm \cdots - 1}{x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} \mp \cdots} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{x^3}{2} \pm \cdots}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \mp \cdots} = 1$$

11. Z uporabo razvoja v Taylorjevo vrsto do vključno pete potence izračunajte približno vrednost integrala $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.

    Sinusno funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto in dobimo

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}{x} \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) \mathrm{d}x = \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right) \Big|_0^2 \approx 1.6089.$$

12. Z uporabo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunajte približni vrednosti za $\sqrt[4]{19}$ in $\sqrt[3]{29}$.

    Uporabimo binomsko formulo

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{19} &= \sqrt[4]{16+3} = 2\left(1 + \tfrac{3}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left(1 + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{16} - \tfrac{3}{32} \cdot \left(\tfrac{3}{16}\right)^2 + \tfrac{7}{128} \cdot \left(\tfrac{3}{16}\right)^3\right) \approx 2.088, \\ \sqrt[3]{29} &= \sqrt[3]{27+2} = 3\left(1 + \tfrac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\left(1 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{27} - \tfrac{1}{9} \cdot \left(\tfrac{2}{27}\right)^2 + \tfrac{5}{81} \cdot \left(\tfrac{2}{27}\right)^3\right) \approx 3.0723. \end{aligned}$$

13. Izračunajte število π na 4 decimalke natančno, če veste, da velja zveza $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$.

    Taylorjeva vrsta za $\arcsin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Vzamemo prvih 5 členov vrste in dobimo

$$f(x) \approx x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9.$$

    Sledi

$$\pi \approx 6\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{48} + \tfrac{3}{1280} + \tfrac{5}{14336} + \tfrac{35}{589824}\right) \approx 3.1415.$$

Fourierova vrsta

Razvoj periodične funkcije f v Fourierovo vrsto na danem intervalu:

Interval $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Interval $[-a, a]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \tfrac{n\pi x}{a} + b_n \sin \tfrac{n\pi x}{a}\right) \\ a_0 &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \cos \tfrac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \sin \tfrac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Kosinusna Fourierova vrsta na $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Sinusna Fourierova vrsta na $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

1. Razvijte funkcijo $f(x) = x^2$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

   Najprej izračunamo koeficient a_0

   $$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}.$$

   Nato izračunamo koeficiente a_n

   $$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\frac{x^2}{n} \sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,\mathrm{d}x \right) \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \left(\pi(-1)^n + \pi(-1)^n - \frac{1}{n} \underbrace{\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} \right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

   Dvakrat integriramo per partes. Prvič: $u = x^2$, $\mathrm{d}v = \cos nx\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{n}\sin nx$. Drugič: $u = x$, $\mathrm{d}v = \sin nx\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = -\frac{1}{n}\cos nx$. Nazadnje izračunamo koeficiente b_n

   $$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{-\frac{x^2}{n} \cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(\underbrace{\frac{x}{n} \sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x \right) = \frac{2}{n^3\pi} \underbrace{\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Dvakrat integriramo per partes. Prvič: $u = x^2$, $\mathrm{d}v = \sin nx\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, $v = -\frac{1}{n}\cos nx$. Drugič: $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos nx\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{n}\sin nx$. Fourierova vrsta je

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\cos nx.$$

2. Razvijte funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x \le \pi, \\ 0 & ; -\pi \le x \le 0, \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Najprej izračunamo koeficient a_0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Nato koeficiente a_n (per partes: $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos nx\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{n}\sin nx$)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}.$$

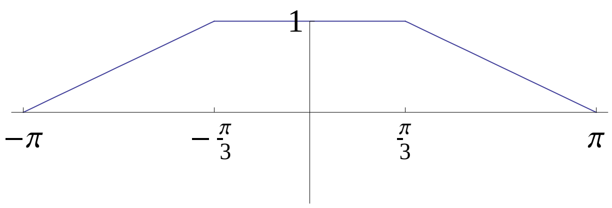
Nazadnje koeficiente b_n (per partes: $u = x$, $\mathrm{d}v = \sin nx\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = -\frac{1}{n}\cos nx$)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\underbrace{\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{=0}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Fourierova vrsta je

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right).$$

3. Razvijte funkcijo f, ki je podana s spodnjim grafom, v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.



Slika 1: Graf funkcije $f(x)$

Ker je funkcija f soda, so koeficienti $b_n = 0$. Funkcijski predpis na intervalu $[0, \pi]$ je

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{\pi}{3}, \\ -\frac{3}{2\pi}x + \frac{3}{2}, & \frac{\pi}{3} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Koeficient $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}$.
Koeficienti

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(-\frac{3}{2\pi}x + \frac{3}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - (-1)^n\right). \end{aligned}$$

Pri računanju drugega integrala uporabimo formulo per partes za $u = -\frac{3}{2\pi}x + \frac{3}{2}$ in $\mathrm{d}v = \cos(nx)\,\mathrm{d}x$, torej je $\mathrm{d}u = -\frac{3}{2\pi}\,\mathrm{d}x$ in $v = \frac{1}{n}\sin(nx)$. Fourierova vrsta je

$$f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - (-1)^n\right)\cos nx.$$

4. Razvijte funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -a \le x < -1, \\ 1 & ; -1 \le x < 1, \\ 0 & ; 1 \le x \le a, \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-a, a]$.

Nalogo lahko rešimo na dva načina. Ena možnost je, da uporabimo formule za Fourierovo vrsto na intervalu $[-a, a]$, druga možnost (po tej bomo reševali), pa je s substitucijo $t = \frac{x\pi}{a}$, ki funkcijo f prevede na interval $[-\pi, \pi]$, kjer nato uporabimo osnovne formule. Iz izbrane substitucije sledi $x = \frac{at}{\pi}$. To vstavimo namesto spremenljivke x v funkcijski predpis za f in dobimo

$$g(t) = \begin{cases} 0 & ; -\pi \le t < -\frac{\pi}{a}, \\ 1 & ; -\frac{\pi}{a} \le t < \frac{\pi}{a}, \\ 0 & ; \frac{\pi}{a} \le t \le \pi. \end{cases}$$

Funkcija je soda, zato so $b_n = 0$ in izračunamo le a_0 in a_n. Najprej koeficient a_0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}t\Big|_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{a} = \frac{1}{a}.$$

Nato še koeficienti a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n\pi}\sin nt\Big|_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{a}.$$

Fourierova vrsta za funkcijo g je

$$g(t) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{a}\cos nt.$$

Fourierova vrsta za funkcijo f po obratni substituciji pa

$$f(x) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}.$$

5. (♣) Razvijte funkcijo $f(x) = x$, ki je dana na intervalu $[0, \pi]$ v sinusno in kosinusno Fourierovo vrsto.

Funkcijo f najprej liho nadaljujemo na interval $[-\pi, 0]$, da dobimo liho funkcijo na intervalu $[-\pi, \pi]$. To razvijemo v sinusno Fourierovo vrsto z danimi formulami (samo b_n)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x}_{=0}\right) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Pri računanju integrala uporabimo formulo per partes za $u = x$ in $\mathrm{d}v = \sin nx\,\mathrm{d}x$, torej je $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ in $v = -\frac{1}{n}\cos nx$. Sinusna Fourierova vrsta je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx.$$

Funkcijo f nato sodo nadaljujemo na interval $[-\pi, 0]$, da dobimo sodo funkcijo na intervalu $[-\pi, \pi]$. To razvijemo v kosinusno Fourierovo vrsto z danimi formulami (samo a_0 in a_n)

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & ; n = 2k \\ -\frac{4}{n^2\pi} & ; n = 2k-1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Pri računanju integrala uporabimo formulo per partes za $u = x$ in $\mathrm{d}v = \cos nx\,\mathrm{d}x$, torej je $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ in $v = \frac{1}{n}\sin nx$. Kosinusna Fourierova vrsta je

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos{(2k-1)x}.$$

6. (♣) Razvijte funkcijo $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ v kosinusno Fourierovo vrsto.

Funkcijo najprej sodo razširimo na interval $[-\pi, 0]$, da dobimo sodo funkcijo, ki jo razvijemo v kosinusno Fourierovo vrsto. Koeficienti so

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi},\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin{(n+1)x} + \sin{(1-n)x}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\cos{(n+1)x}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{1-n}\cos{(1-n)x}\Big|_0^{\pi}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+2}+1}{n+1} + \frac{(-1)^{2-n}+1}{1-n}\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)} & ; n = 2k \\ 0 & ; n = 2k-1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Upoštevamo formulo $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin{(\alpha+\beta)} + \sin{(\alpha-\beta)}\right)$. Kosinusna Fourierova vrsta je

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos{(2kx)}.$$

7. (♣) Razvijte funkcijo $f(x) = x - 15$ na intervalu $[10, 20]$ v sinusno Fourierovo vrsto.

Napravimo substitucijo $t = x - 15$, ki interval $[10, 20]$ preslika na interval $[-5, 5]$. Ker je $x = t + 15$, dobimo novo funkcijo $g(t) = t$, ki je liha funkcija na novem intervalu in jo razvijemo v sinusno Fourierovo vrsto s formulami za interval $[-a, a]$. Koeficienti so

$$b_n = \frac{2}{5}\int_0^5 t\sin\frac{n\pi t}{5}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{5}\left(-\frac{5t}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{5}\Big|_0^5 + \frac{5}{n\pi}\underbrace{\int_0^5\cos\frac{n\pi t}{5}\,\mathrm{d}t}_{=0}\right) = \frac{10}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

V prvem koraku smo integrirali per partes: $u = t$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ in $\mathrm{d}v = \sin\frac{n\pi t}{5}\,\mathrm{d}t$, $v = -\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{5}$. Vrsta za funkcijo g je

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{5}.$$

Sinusna Fourierova vrsta po obratni substituciji pa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi(x-15)}{5}.$$

FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

Nivojske krivulje funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $z = f(x, y)$, so krivulje $f(x, y) = C$ v definicijskem območju funkcije f na katerih zavzame f konstantno vrednost C.

Parcialni odvod funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ po spremenljivki x_i je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}.$$

Totalni diferencial funkcije f je

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n.$$

Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima n prvih in n^2 drugih parcialnih odvodov. Če drugi mešani odvodi obstajajo in so zvezni, velja $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$.

Ekstremi funkcij več spremenljivk:

Naj bo $f = f(x, y)$ funkcija dveh spremenljivk. Točka (a, b) je kritična ali stacionarna točka funkcije f, če sta oba prva parcialna odvoda v tej točki enaka 0

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Kritične točke klasificiramo tako, da izračunamo druge parcialne odvode v vsaki posamezni točki

$$A = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad B = \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \quad C = \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b), \quad \Delta = AC - B^2.$$

1. Če je $\Delta > 0$, potem je v točki (a, b) ekstrem.

   a) Če je $A > 0$, potem je v tej točki minimum.

   b) Če je $A < 0$, potem je v tej točki maksimum.

2. Če je $\Delta < 0$, potem je v točki (a, b) sedlo.

3. Če je $\Delta = 0$, potem na podlagi drugih odvodov ne moremo klasificirati točke (a, b).

Klasifikacijo lahko napravimo tudi s Hessejevo matriko funkcije f, kjer je $\Delta = \det(Hf(a, b))$

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Vezani ekstremi:

Dana je funkcija $f(x, y)$, ki je definirana na območju D. Rob območja je določen s krivuljo $\varphi(x, y) = 0$. Ekstremi funkcije $f(x, y)$ na krivulji $\varphi(x, y) = 0$ nastopajo v stacionarnih točkah Lagrangeove funkcije

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

1. Poiščite in narišite definicijska območja naslednjih funkcij.

   a) $f(x, y) = \frac{xy - 5}{2\sqrt{y - x^2}}$.

   Funkcija ni definirana tam, kjer je argument pod korenom manjši od 0, ter tam, kjer delimo z 0. Torej mora biti $y - x^2 \geq 0$ in $y - x^2 \neq 0$. Ta dva pogoja nam skupaj dasta pogoj $y - x^2 > 0$, oz. $y > x^2$. To je ravno območje nad parabolo $y = x^2$. Definicijsko območje je množica $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2\}$.

b) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$.

Funkcija je definirana tam, kjer je $1 - x^2 \geq 0$ in $y^2 - 1 \geq 0$. Rešitev prve neenačbe je $-1 \leq x \leq 1$, rešitev druge pa $y \leq -1$ ali $y \geq 1$. Definicijsko območje je množica $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1 \wedge (y \geq 1 \vee y \leq -1)\}$.

c) $f(x,y) = \frac{\ln(1-|x|-|y|)}{xy}$.

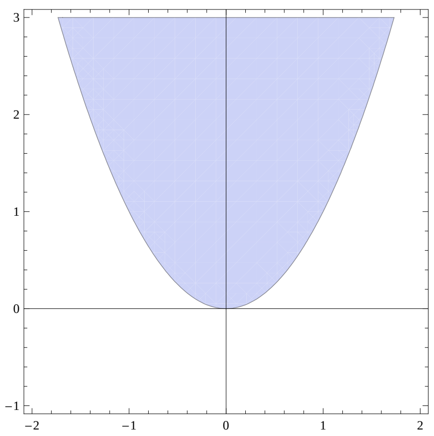
Funkcija je definirana tam, kjer ne delimo z 0, torej, ko je $xy \neq 0$. To je res za $x \neq 0$ in $y \neq 0$. To pomeni, da koordinatni osi nista v definicijskem območju. Drugi pogoj, da je funkcija definirana je, da je logaritmand strogo pozitiven $1 - |x| - |y| > 0$. Neenačbo z absolutnimi vrednostmi rešimo na vsakem kvadrantu posebej

$$\begin{aligned}
x > 0, y > 0 &\ :\ 1 - x - y > 0 \ \Rightarrow\ y < -x + 1,\\
x < 0, y > 0 &\ :\ 1 + x - y > 0 \ \Rightarrow\ y < x + 1,\\
x < 0, y < 0 &\ :\ 1 + x + y > 0 \ \Rightarrow\ y > -x - 1,\\
x > 0, y < 0 &\ :\ 1 - x + y > 0 \ \Rightarrow\ y > x - 1.
\end{aligned}$$

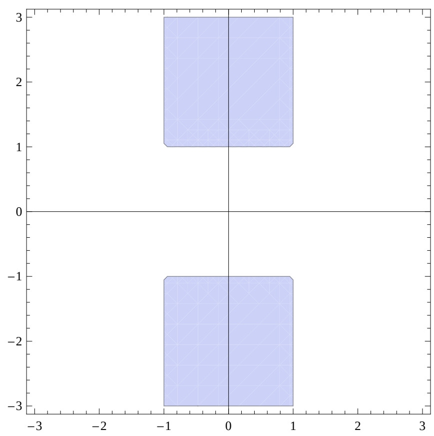
Grafično je rezultat kvadrat z oglišči $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ in $(1,0)$, brez stranic in diagonal. Definicijsko območje je množica $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 - |x| - |y| > 0 \wedge xy \neq 0\}$.

d) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \ln(x+y)$.

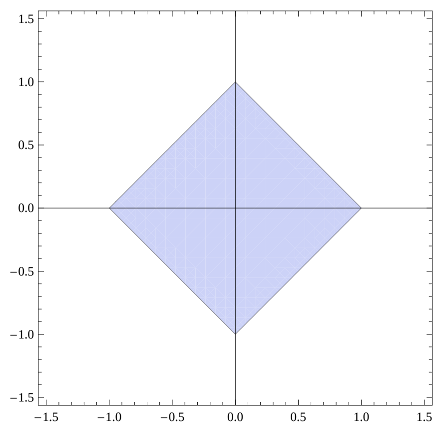
Funkcija je definirana tam, kjer je $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ in $x + y > 0$. Prva neenačba $x^2 + y^2 \leq 9$ predstavlja krog s središčem v izhodišču in radijem 3, druga neenačba $y > -x$ pa polravnino nad premico $y = -x$. Definicijsko območje je $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y > -x\}$.



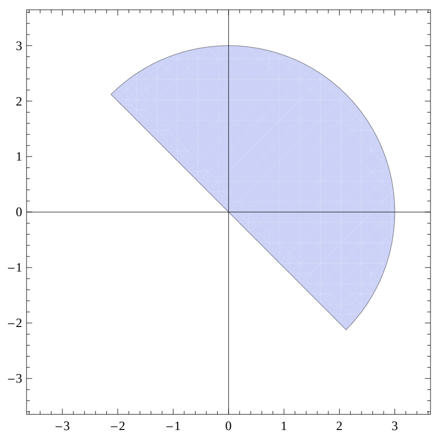
a) $f(x,y) = \frac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$



b) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$



c) $f(x,y) = \frac{\ln(1-|x|-|y|)}{xy}$



d) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2} + \ln(x+y)$

2. Poiščite definicijsko območje funkcije $f(x,y,z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$.

   Funkcija je definirana, ko je $25 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, torej ko je $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$, to pa je ravno krogla z radijem 5. Definicijsko območje je množica $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$.

3. Narišite nekaj nivojskih krivulj za dane funkcije.

   a) $f(x,y) = xy$.

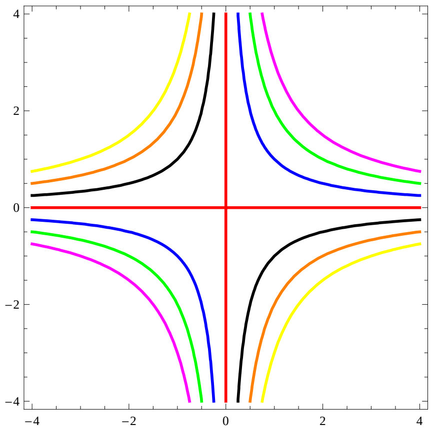
   Najprej izberemo $c = 0$ in dobimo $xy = 0$, torej $x = 0$ ali $y = 0$. To sta ravno obe koordinatni osi. Nato po vrsti izbiramo pozitivne $c = 1, 2, 3$ in dobimo za nivojnice hiperbole $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ in $y = \frac{3}{x}$. Nazadnje pa po vrsti izbiramo negativne $c = -1, -2, -3$ in dobimo za nivojnice hiperbole $y = -\frac{1}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$ in $y = -\frac{3}{x}$. Graf funkcije predstavlja obliko sedla.

   b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$.

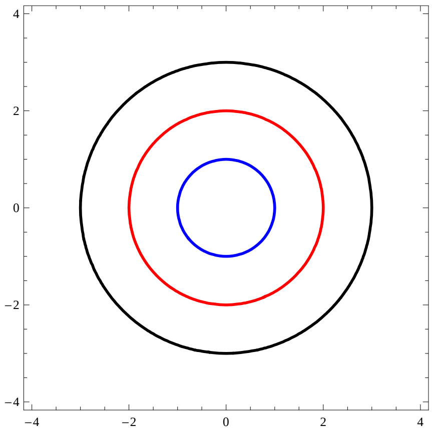
   Najprej izberemo $c = 1$ in dobimo $\mathrm{e}^{x^2+y^2} = 1$, torej $x^2 + y^2 = 0$, kar je točka $(0,0)$. Nato pa po vrsti izbiramo $c = \mathrm{e}, \mathrm{e}^4, \mathrm{e}^9$ in dobimo enačbe $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ in $x^2 + y^2 = 9$, ki predstavljajo enačbe koncentričnih krožnic. Graf funkcije predstavlja odprto osnosimetrično posodo s precej strmim robom.

   c) $f(x,y) = x^2 - y$.

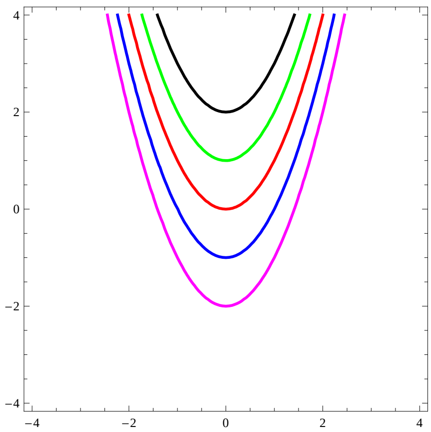
   Najprej izberemo $c = 0$ in dobimo $x^2 - y = 0$, to je parabolo $y = x^2$. Nato po vrsti izbiramo $c = 1, 2, -1, -2$ in dobimo parabole $y = x^2 - 1$, $y = x^2 - 2$, $y = x^2 + 1$ in $y = x^2 + 2$, ki se od prvotne parabole razlikujejo le za premik navzgor ($c < 0$) ali navzdol ($c > 0$).



a) $f(x,y) = xy$



b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$



c) $f(x,y) = x^2 - y$

4. Izračunajte limito $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$.

   Limito izračunamo s prevedbo kartezičnih koordinat na polarne ($x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$)

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y^2}{2xy} = \lim_{(r,\varphi)\to(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})} \frac{r^2}{2r^2\cos\varphi\sin\varphi} = \lim_{\varphi\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin 2\varphi} = 1.$$

5. Poiščite prve parcialne odvode in totalni diferencial naslednjih funkcij.

   a) $f(x,y) = (x^3-y^2)^2$

      Parcialno odvajamo po eni spremenljivki tako, da obravnavamo ostale spremenljivke kot konstante. Dobimo

$$\begin{aligned} f_x &= 6x^2(x^3-y^2), \\ f_y &= -4y(x^3-y^2), \\ \mathrm{d}f &= 6x^2(x^3-y^2)\mathrm{d}x - 4y(x^3-y^2)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

   b) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \ln(xy)$

$$\begin{aligned} f_x &= \mathrm{e}^x\left(\ln(xy) + \tfrac{1}{x}\right), \\ f_y &= \tfrac{\mathrm{e}^x}{y}, \\ \mathrm{d}f &= \mathrm{e}^x\left(\ln(xy) + \tfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \tfrac{\mathrm{e}^x}{y}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

   c) $f(x,y,z) = \sin(x^2+y^2+z^2)$

$$\begin{aligned} f_x &= 2x\cos(x^2+y^2+z^2), \\ f_y &= 2y\cos(x^2+y^2+z^2), \\ f_z &= 2z\cos(x^2+y^2+z^2), \\ \mathrm{d}f &= 2\cos(x^2+y^2+z^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z). \end{aligned}$$

   d) $f(x,y,z) = \arcsin\frac{xy}{z} - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

$$\begin{aligned} f_x &= \tfrac{y}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \tfrac{x}{x^2+y^2}, \\ f_y &= \tfrac{x}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \tfrac{y}{x^2+y^2}, \\ f_z &= \tfrac{-xy}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}}, \\ \mathrm{d}f &= \left(\tfrac{y}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \tfrac{x}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\tfrac{x}{\sqrt{z^2-x^2y^2}} - \tfrac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y - \tfrac{-xy}{z\sqrt{z^2-x^2y^2}}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

   e) $f(x,y,z) = z^{xy}$

$$\begin{aligned} f_x &= z^{xy}\ln zy, \quad f_y = z^{xy}\ln zx, \quad f_z = xyz^{xy-1}, \\ \mathrm{d}f &= z^{xy}\ln zy\mathrm{d}x + z^{xy}\ln zx\mathrm{d}y + xyz^{xy-1}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

6. Poiščite vse parcialne odvode prvega in drugega reda za naslednje funkcije.

   a) $f(x,y) = \ln(x^2+y)$

      Izračunajmo prve in druge parcialne odvode

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y}, \qquad f_y = \frac{1}{x^2+y},$$

$$f_{xx} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}, \quad f_{xy} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}, \qquad f_{yx} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}, \quad f_{yy} = \frac{-1}{(x^2+y)^2}.$$

      Opazimo, da sta mešana odvoda enaka $f_{xy} = f_{yx}$.

b) $f(x,y) = \ln(3x-y)$

$$f_x = \frac{1}{3x-y}, \qquad f_y = \frac{-1}{3x-y},$$
$$f_{xx} = \frac{-9}{(3x-y)^2}, \quad f_{xy} = \frac{3}{(3x-y)^2}, \qquad f_{yx} = \frac{3}{(3x-y)^2}, \quad f_{yy} = \frac{-1}{(3x-y)^2}.$$

7. Poiščite tretji parcialni odvod f_{xyz} za funkcijo $f(x,y,z) = \sin(xyz)$.

   Funkcijo trikrat odvajamo, enkrat po x, enkrat po y in enkrat po z. Vrstni red po katerem odvajamo ni pomemben. Dobimo odvode

$$\begin{aligned} f_x &= yz\cos(xyz), \\ f_{xy} &= z\cos(xyz) - xyz^2\sin(xyz), \\ f_{xyz} &= \cos(xyz) - 3xyz\sin(xyz) - x^2y^2z^2\cos(xyz). \end{aligned}$$

8. Poiščite tretji parcialni odvod f_{yzz} za funkcijo $f(x,y,z) = y\ln(x^2+z^4)$.

   Funkcijo trikrat odvajamo, enkrat po y in dvakrat po z. Vrstni red v katerem odvajamo ni pomemben. Dobimo odvode

$$f_y = \ln(x^2+z^4), \quad f_{yz} = \frac{4z^3}{x^2+z^4}, \quad f_{yzz} = \frac{4z^2(3x^2-z^4)}{(x^2+z^4)^2}.$$

9. Z uporabo diferenciala približno izračunajte vrednost naslednjih izrazov.

   Uporabimo formulo

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k.$$

   a) $\sqrt{2.04^3 + 2.98^2 - 1}$

   Izberemo $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^2-1}$, $a = 2$, $b = 3$, $h = 0.04$ in $k = -0.02$. Izračunamo odvoda $f_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^2-1}}$ in $f_y = \frac{y}{\sqrt{x^3+y^2-1}}$. Torej je $f(a,b) = f(2,3) = 4$, $f_x(a,b) = f_x(2,3) = \frac{3}{2}$ in $f_y(a,b) = f_y(2,3) = \frac{3}{4}$. Dobimo

$$\sqrt{2.04^3 + 2.98^2 - 1} = 4 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{4}{100} - \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{100} = 4.045.$$

   Za primerjavo, točna vrednost je 4.04599.

   b) $\sin 32^\circ \cos 59^\circ$

   Izberemo $f(x,y) = \sin x\cos y$, $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $h = \frac{\pi}{90}$ in $k = -\frac{\pi}{180}$. Izračunamo odvoda $f_x = \cos x\cos y$ in $f_y = -\sin x\sin y$. Torej je $f(a,b) = \frac{1}{4}$, $f_x(a,b) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ in $f_y(a,b) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Dobimo

$$\sin 32^\circ \cos 59^\circ = \tfrac{1}{4} + \tfrac{\pi\sqrt{3}}{360} + \tfrac{\pi\sqrt{3}}{720} = \tfrac{3\pi\sqrt{3}+180}{720} = 0.272672.$$

   Za primerjavo, točna vrednost je 0.272929.

   c) $1.03^3\,0.97^2$

   Izberemo $f(x,y) = x^3y^2$, $a = 1$, $b = 1$, $h = 0.03$ in $k = -0.03$. Izračunamo odvoda $f_x = 3x^2y^2$ in $f_y = 2x^3y$. Torej je $f(1,1) = 1$, $f_x(1,1) = 3$ in $f_y(1,1) = 2$. Dobimo

$$1.03^3\,0.97^2 = 1 + \tfrac{3}{100}\cdot 3 - \tfrac{3}{100}\cdot 2 = 1.03.$$

   Za primerjavo, točna vrednost je 1.02815.

10. Dokažite, da je dana funkcija harmonična. Funkcija je harmonična, če je $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

a) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Izračunamo prve in druge parcialne odvode (razen mešanega)

$$f_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad f_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Od tod sledi, da je $f_{xx} + f_{yy} = 0$, zato je funkcija f harmonična.

b) $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x} \cos y + \mathrm{e}^{-y} \cos x$

Izračunamo prve in druge parcialne odvode (razen mešanega)

$$\begin{aligned} f_x &= -\mathrm{e}^{-x} \cos y - \mathrm{e}^{-y} \sin x, & f_{xx} &= \mathrm{e}^{-x} \cos y - \mathrm{e}^{-y} \cos x, \\ f_y &= -\mathrm{e}^{-x} \sin y - \mathrm{e}^{-y} \cos x, & f_{yy} &= -\mathrm{e}^{-x} \cos y + \mathrm{e}^{-y} \cos x. \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $f_{xx} + f_{yy} = 0$, zato je funkcija f harmonična.

11. Odvajajte funkcijo $f(x, y) = \sin\frac{x}{y}$, $x(t) = t^2 + 3$, $y(t) = t - 2$, po parametru t.

Uporabimo formulo za posredni odvod $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Izračunamo odvode in dobimo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$ in $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1$. Sledi

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{t^2 - 4t - 3}{(t-2)^2}\cos\frac{t^2 + 3}{t - 2}.$$

12. Določite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = \mathrm{e}^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

Najprej izračunamo oba prva parcialna odvoda

$$\begin{aligned} f_x &= \mathrm{e}^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1), \\ f_y &= \mathrm{e}^{2x}(2y + 2). \end{aligned}$$

Kritične točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Dobimo sistem enačb $\mathrm{e}^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0$ in $\mathrm{e}^{2x}(2y + 2) = 0$. Iz druge enačbe takoj dobimo $y = -1$. To vstavimo v prvo enačbo in dobimo $x = \frac{1}{2}$. Imamo eno kritično točko $T(\frac{1}{2}, -1)$. Izračunamo vse druge parcialne odvode

$$f_{xx} = 4\mathrm{e}^{2x}(x + y^2 + 2y + 1), \quad f_{xy} = 4\mathrm{e}^{2x}(y + 1), \quad f_{yy} = 2\mathrm{e}^{2x}$$

in sestavimo Hessejevo matriko

$$H_f = \begin{bmatrix} 4\mathrm{e}^{2x}(x + y^2 + 2y + 1) & 4\mathrm{e}^{2x}(y + 1) \\ 4\mathrm{e}^{2x}(y + 1) & 2\mathrm{e}^{2x} \end{bmatrix}.$$

Za kritično točko $T(\frac{1}{2}, -1)$ preverimo pogoj

$$\det H_f(\tfrac{1}{2}, -1) = \begin{vmatrix} 2\mathrm{e} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e} \end{vmatrix} = 4\mathrm{e}^2 > 0.$$

V tej točki je lokalni ekstrem. Ker je $f_{xx}(\frac{1}{2}, -1) = 2\mathrm{e} > 0$, je to lokalni minimum.

13. Določite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Najprej izračunamo oba prva parcialna odvoda

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 3y, \\ f_y &= 3y^2 - 3x. \end{aligned}$$

Kritične točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Dobimo sistem enačb $3x^2 - 3y = 0$ in $3y^2 - 3x = 0$, oz. $y = x^2$ in $x = y^2$. Prvo enačbo vstavimo v drugo in dobimo $x = x^4$, oz. $x^4 - x = x(x-1)(x^2+x+1) = 0$. Dobimo dve realni rešitvi $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$, torej $y_1 = 0$ in $y_2 = 1$. Kritični točki sta $T_1(0,0)$ in $T_2(1,1)$. Izračunamo vse druge parcialne odvode in sestavimo Hessejevo matriko

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -3, \quad f_{yy} = 6y \quad \Rightarrow \quad H_f = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}.$$

Za obe kritični točki preverimo pogoj:

i) $T_1(0,0)$:
$$\det H_f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0.$$
V tej točki je sedlo.

ii) $T_2(1,1)$:
$$\det H_f(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0.$$
V tej točki je lokalni ekstrem. Ker je $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, je to lokalni minimum.

14. Določite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = \mathrm{e}^x(x + y^2)$.

Najprej izračunamo oba prva parcialna odvoda $f_x = \mathrm{e}^x(x + y^2 + 1)$ in $f_y = 2\mathrm{e}^x y$. Kritične točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Dobimo sistem enačb $x + y^2 + 1 = 0$ in $y = 0$. Iz prve enačbe takoj dobimo $x = -1$, kar pomeni, da imamo eno kritično točko $T(-1,0)$. Izračunamo vse druge parcialne odvode in sestavimo Hessejevo matriko

$$f_{xx} = \mathrm{e}^x(x + y^2 + 2), \quad f_{xy} = 2\mathrm{e}^x y, \quad f_{yy} = 2\mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad H_f = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x(x + y^2 + 2) & 2\mathrm{e}^x y \\ 2\mathrm{e}^x y & 2\mathrm{e}^x \end{bmatrix}.$$

Za kritično točko $T(-1,0)$ preverimo pogoj

$$\det H_f(-1,0) = \begin{vmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e}^{-1} \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

V tej točki je lokalni ekstrem. Ker je $f_{xx}(-1,0) = \mathrm{e} > 0$, je to lokalni minimum.

15. Določite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 y - \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - y^2 - 3y + 1$.

Najprej izračunamo oba prva parcialna odvoda

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy - x^2, \\ f_y &= x^2 + y^2 - 2y - 3. \end{aligned}$$

Kritične točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Dobimo sistem enačb $x(2y - x) = 0$ in $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$. Glede na prvo enačbo ločimo dva podprimera. Pri prvem ($x = 0$), dobimo iz druge enačbe $y^2 - 2y - 3 = (y-3)(y+1) = 0$, torej $y_1 = 3$ in $y_2 = -1$. Pri drugem ($x = 2y$) pa dobimo iz druge enačbe $5y^2 - 2y - 3 = (5y+3)(y-1) = 0$, torej $y_1 = 1$, $x_1 = 2$ in $y_2 = -\frac{3}{5}$, $x_2 = -\frac{6}{5}$. Kritične točke so $T_1(0,3)$, $T_2(0,-1)$, $T_3(2,1)$ in $T_4(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$. Izračunamo vse druge parcialne odvode

$$f_{xx} = 2y - 2x, \quad f_{xy} = 2x, \quad f_{yy} = 2y - 2.$$

Klasifikacija kritičnih točk:

i) $T_1(0,3)$:
$$A = f_{xx}(0,3) = 6 > 0, B = f_{xy}(0,3) = 0, C = f_{yy}(0,3) = 4, \Delta = AC - B^2 = 24 > 0.$$
V tej točki je lokalni minimum.

ii) $T_2(0,-1)$:

$$A = -2 < 0, \quad B = 0, \quad C = -4, \quad \Delta = AC - B^2 = 8 > 0.$$

V tej točki je lokalni maksimum.

iii) $T_3(2,1)$:

$$A = -2, \quad B = 4, \quad C = 0, \quad \Delta = AC - B^2 = 16 < 0.$$

V tej točki je sedlo.

iv) $T_4(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$:

$$A = \tfrac{6}{5}, \quad B = -\tfrac{12}{5}, \quad C = -\tfrac{16}{5}, \quad \Delta = AC - B^2 = -\tfrac{48}{5} < 0.$$

V tej točki je sedlo.

16. Določite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

Najprej izračunamo vse tri prve parcialne odvode

$$f_x = 4x - y - z, \quad f_y = 2y - x, \quad f_z = 2 - x.$$

Kritične točke dobimo tam, kjer so vsi prvi parcialni odvodi enaki 0. Dobimo sistem enačb $4x - y - z = 0$, $2y - x = 0$ in $2 - x = 0$, ki ima rešitev $x = 2$, $y = 1$ in $z = 7$. Tako dobimo eno kritično točko $T(2,1,7)$. Izračunamo vse druge parcialne odvode

$$f_{xx} = 4, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{zz} = 0, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{xz} = -1, \quad f_{yz} = 0$$

in sestavimo Hessejevo matriko

$$H_f = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za kritično točko $T(2,1,7)$ preverimo pogoj

$$\det H_f(2,1,7) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

V tej točki je sedlo.

17. Določite lokalne ekstreme implicitno podane funkcije $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

Funkcijo $z = z(x,y)$ najprej implicitno odvajamo po x in nato še po y

$$\begin{aligned} 2x + 2zz_x - 2 + 4z_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad z_x = \frac{1-x}{z-2}, \\ 2y + 2zz_y - 2 - 4z_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad z_y = \frac{-1-y}{z-2}. \end{aligned}$$

Iz enačbe $z_x = 0$ sledi $x = 1$, iz enačbe $z_y = 0$ pa $y = -1$. To vstavimo v prvotno implicitno enačbo in dobimo $z^2 - 4z - 12 = (z-6)(z+2) = 0$, kar nam da dve vrednosti $z_1 = 6$ in $z_2 = -2$. Dobimo dve kritični točki $T_1(1,-1,6)$ in $T_2(1,-1,-2)$. Druge odvode dobimo z odvajanjem prvih odvodov, kjer upoštevamo $z_x = z_y = 0$

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \frac{-z + 2 - (1-x)z_x}{(z-2)^2} = \frac{-1}{z-2}, \\ z_{xy} &= \frac{-(1-x)z_y}{(z-2)^2} = 0, \\ z_{yy} &= \frac{-z + 2 - (-1-y)z_y}{(z-2)^2} = \frac{-1}{z-2}. \end{aligned}$$

Hessejeva matrika je

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{-1}{z-2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{z-2} \end{bmatrix}.$$

Klasifikacija kritičnih točk:

i) $T_1(1,-1,6)$:

$$\det H_f(1,-1,6) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} > 0.$$

V tej točki je lokalni ekstrem. Ker je $z_{xx}(1,-1,6) = -\frac{1}{4} < 0$, je to lokalni maksimum.

ii) $T_2(1,-1,-2)$:

$$\det H_f(1,-1,-2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} > 0.$$

V tej točki je lokalni ekstrem. Ker je $z_{xx}(1,-1,-2) = \frac{1}{4} > 0$, je to lokalni minimum.

18. Določite vezani ekstrem funkcije $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 6$ pri pogoju $y = 2x - 1$.

Sestavimo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x,y,\lambda) = 3x^2 + 2y^2 - 6 + \lambda(y - 2x + 1),$$

ki jo odvajamo po vseh treh spremenljivkah in odvode izenačimo z 0

$$\begin{aligned} F_x &= 6x - 2\lambda = 0, \\ F_y &= 4y + \lambda = 0, \\ F_\lambda &= y - 2x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Drugo enačbo množimo z 2 in prištejemo prvi, da dobimo $6x + 8y = 0$, oz. $y = -\frac{3}{4}x$. To vstavimo v tretjo enačbo in dobimo $x = \frac{4}{11}$ in $y = -\frac{3}{11}$. Ker je funkcijska vrednost v tej točki manjša kot funkcijske vrednosti v drugih točkah na premici, je v tej točki minimum.

19. Poiščite najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = x + 2y$ na krivulji $x^2 + y^2 = 5$.

Sestavimo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5),$$

ki jo odvajamo po vseh treh spremenljivkah in odvode izenačimo z 0

$$\begin{aligned} F_x &= 1 + 2\lambda x = 0, \\ F_y &= 2 + 2\lambda y = 0, \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $x = -\frac{1}{2\lambda}$, iz druge $y = -\frac{1}{\lambda}$ in to vstavimo v tretjo enačbo. Dobimo $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 5$, od koder sledi $4\lambda^2 = 1$ in zato je $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Ko je $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, je $x_1 = -1$ in $y_1 = -2$, medtem ko je pri $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ in $y_2 = 2$. Dobimo dve stacionarni točki $T_1(-1,-2)$ in $T_2(1,2)$. Ker je $f(-1,-2) = -5$ in $f(1,2) = 5$ imamo v prvi točki minimum in v drugi točki maksimum.

20. Poiščite ekstreme funkcije $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, kjer je vez podana z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Sestavimo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x,y,z,\lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1),$$

ki jo odvajamo po vseh štirih spremenljivkah in odvode izenačimo z 0

$$\begin{aligned} F_x &= 1 + 2\lambda x = 0, \\ F_y &= -2 + 2\lambda y = 0, \\ F_z &= 2 + 2\lambda z = 0, \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo $x = -\frac{1}{2\lambda}$, iz druge $y = \frac{1}{\lambda}$, iz tretje $z = -\frac{1}{\lambda}$ in to vstavimo v četrto enačbo. Dobimo $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$, od koder sledi $4\lambda^2 = 9$ in zato je $\lambda_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$. Ko je $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, je $x_1 = -\frac{1}{3}$, $y_1 = \frac{2}{3}$ in $z_1 = -\frac{2}{3}$, medtem ko je pri $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $y_2 = -\frac{2}{3}$ in $z_2 = \frac{2}{3}$. Dobimo dve stacionarni točki $T_1(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ in $T_2(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Ker je $f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -3$ in $f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 3$ imamo v prvi točki minimum in v drugi točki maksimum.

21. Poiščite točke na ploskvi $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$, ki so najbolj oddaljene od ravnine $z = 0$.

Sestavimo Lagrangeovo funkcijo, kjer je funkcija razdalje enaka $d(x, y, z) = |z|$

$$F(x, y, z, \lambda) = z + \lambda(2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6).$$

To odvajamo po vseh štirih spremenljivkah in odvode izenačimo z 0

$$\begin{aligned} F_x &= 4\lambda x + 2\lambda z = 0, \\ F_y &= 6\lambda y = 0, \\ F_z &= 1 + 4\lambda z + 2\lambda x = 0, \\ F_\lambda &= 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6 = 0. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe dobimo $y = 0$, saj je $\lambda \neq 0$. Iz prve in tretje enačbe izločimo z, dobimo $1 - 6\lambda x = 0$, oz. $x = \frac{1}{6\lambda}$, $z = -\frac{1}{3\lambda}$. To vstavimo v četrto enačbo in dobimo $\frac{2}{36\lambda^2} + \frac{2}{9\lambda^2} - \frac{2}{18\lambda^2} = 6$, od koder sledi $36\lambda^2 = 1$ in zato je $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{6}$. Ko je $\lambda_1 = \frac{1}{6}$, je $x_1 = 1$ in $z_1 = -2$, medtem ko je pri $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$, $x_2 = -1$ in $z_2 = 2$. Dobimo dve točki z največjo oddaljenostjo $T_1(1, 0, -2)$ in $T_2(-1, 0, 2)$.

22. (♣) Poiščite stranice pravokotnega trikotnika, ki ima dano ploščino $S = 2$ in najmanši obseg.

Obseg pravokotnega trikotnika izračunamo po formuli $o = a + b + c$, ploščino po formuli $S = \frac{ab}{2}$, velja pa tudi Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$. Lagrangeova funkcija je

$$F(a, b, c, \lambda, \mu) = a + b + c + \lambda(a^2 + b^2 - c^2) + \mu(ab - 4).$$

Odvajamo po vseh spremenljivkah in odvode izenačimo z 0

$$\begin{aligned} F_a &= 1 + 2\lambda a + \mu b = 0, \\ F_b &= 1 + 2\lambda b + \mu a = 0, \\ F_c &= 1 - 2\lambda c = 0, \\ F_\lambda &= a^2 + b^2 - c^2 = 0, \\ F_\mu &= \tfrac{ab}{2} - 2 = 0. \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb izločimo μ in dobimo $(1 + 2\lambda(a + b))(a - b) = 0$. Ker mora biti $\lambda > 0$ (tretja enačba), je $a = b$. To vstavimo v peto enačbo od koder sledi $a^2 = 4$, torej $a = b = 2$. Iz četrte enačbe sledi še $c = 2\sqrt{2}$.

23. Zapišite število 27 kot produkt treh pozitivnih števil x, y, z tako, da bo vsota $x+y+z$ najmanjša.

Sestavimo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(xyz - 27).$$

Odvajamo po vseh spremenljivkah in odvode izenačimo z 0

$$\begin{aligned} F_x &= 1 + \lambda yz = 0, \\ F_y &= 1 + \lambda xz = 0, \\ F_z &= 1 + \lambda xy = 0, \\ F_\lambda &= xyz - 27 = 0. \end{aligned}$$

Prvo enačbo množimo z x, drugo z y, tretjo z z ter odštejemo drugo od prve ter tretjo od druge. Dobimo $x - y = 0$ in $y - z = 0$, oz. $x = y = z$. To vstavimo v zadnjo enačbo in dobimo $x^3 = 27$, oz. $x = y = z = 3$.

24. Na elipsi z enačbo $4x^2 + 9y^2 = 36$ poiščite točko, ki je najbližja točki $T(1, 0)$. Izračunajte minimalno razdaljo.

Razdalja med dvema točkama izračunamo po formuli

$$d(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Ker so vse razdalje večje od 1, lahko brez škode vzamemo za funkcijo, ki jo minimiziramo, kvadrat razdalje. Torej je Lagrangeova funkcija

$$F(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(4x^2 + 9y^2 - 36).$$

Odvajamo po vseh spremenljivkah in odvode izenačimo z 0

$$\begin{aligned} F_x &= 2(x-1) + 8\lambda x = 0, \\ F_y &= 2y + 18\lambda y = 0, \\ F_\lambda &= 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0. \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb izločimo λ, da dobimo $y(5x - 9) = 0$. Rešitvi te enačbe sta $y = 0$ (iz tretje enačbe je $x = \pm 3$) in $x = \frac{9}{5}$ (iz tretje enačbe je $y = \pm\frac{8}{5}$). Dobimo 4 stacionarne točke $T_1(3, 0)$ z razdaljo $d(3, 0) = 2$, $T_2(-3, 0)$ z razdaljo $d(-3, 0) = 4$, $T_3(\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$ in $T_4(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5})$ z razdaljo $d(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}) = d(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}) = \frac{4\sqrt{5}}{5} < 2$. Opazimo, da sta točki T_3 in T_4 najbližji, točka T_2 pa najbolj oddaljena od točke T.

25. (♣) Izračunajte globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ na $\overline{K}(0, 2)$.

Globalne ekstreme iščemo na krogu s središčem v izhodišču $(0, 0)$ in polmerom 2. Vez predstavlja krožnica $x^2 + y^2 = 4$.

i) Lokalni ekstremi v notranjosti območja. Prva parcialna odvoda izenačimo z 0 in dobimo sistem linearnih enačb $f_x = 6x - 2y = 0$ in $f_y = -2x + 6y = 0$, ki ima rešitev $x = 0$, $y = 0$, torej je edina stacionarna točka $T(0, 0)$. Iz drugih parcialnih odvodov ($f_{xx} = 6$, $f_{xy} = -2$ in $f_{yy} = 6$) sestavimo Hessejevo matriko $H_f = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. Ker je $\det(H_f(0, 0)) = 32 > 0$ in $f_{xx}(0, 0) = 6 > 0$, je v točki $T(0, 0)$ lokalni minimum.

ii) Vezani ekstremi na robu območja. Lagrangeovo funkcijo

$$F(x, y, \lambda) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

odvajamo po vseh spremenljivkah in odvode izenačimo z 0

$$F_x = 6x - 2y + 2\lambda x = 0, \quad F_y = -2x + 6y + 2\lambda y = 0, \quad F_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Iz prve enačbe dobimo $y = (3+\lambda)x$, iz druge pa $x = (3+\lambda)y$. Drugi izraz vstavimo v prvega in dobimo $y = (3+\lambda)^2 y$, oz. $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 1$. Od tod sledi $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda+2)(\lambda+4) = 0$, torej $\lambda_1 = -2$ ($y = -x$, $x^2 = 2$, oz. $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ in $y_{1,2} = \mp\sqrt{2}$) in $\lambda_2 = -4$ ($y = x$, $x^2 = 2$, oz. $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ in $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$). Dobimo 4 stacionarne točke. V točkah $T_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ in $T_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ dobimo vezani maksimum, saj je v teh dveh točkah vrednost funkcije enaka 16, v točkah $T_3(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ in $T_4(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ pa dobimo vezani minimum, saj je v teh dveh točkah vrednost funkcije enaka 8.

Primerjava vrednosti funkcije v lokalnih in vezanih ekstremih pokaže, da je globalni minimum v točki $T(0, 0)$ ($f(0, 0) = 0$), globalna maksimuma pa sta v točkah $T_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ in $T_2(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ($f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 16$).

DIFERENCIALNE ENAČBE PRVEGA REDA

Osnovni pojmi:

Diferencialna enačba reda n je zveza med neodvisno spremenljivko x, odvisno spremenljivko y ter njenimi odvodi $y', y'', \ldots, y^{(n)}$: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Rešitev diferencialne enačbe reda n je n-parametrična družina funkcij. Če imamo dane začetne pogoje, dobimo eno rešitev tako, da eliminiramo konstante.

Diferencialne enačbe prvega reda:

Začetni problem (Cauchy-jeva naloga): $F(x, y, y') = 0$, $y(x_0) = y_0$.

Osnovna enačba diferencialnega računa: $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Enačba z ločljivima spremenljivkama: $y' = f(x)g(y)$.

Homogena enačba: $y' = f(\frac{y}{x})$. Uvedemo novo odvisno spremenljivko: $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$ in $y' = xu' + u$.

Linearna enačba: $y' + p(x)y = q(x)$. Rešitev zapišemo v obliki $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$, kjer je y_H rešitev homogene linearne enačbe $y' + p(x)y = 0$, y_p pa partikularna rešitev, ki jo dobimo jo z metodo variacije konstante.

Bernoullijeva enačba: $r(x)y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$. Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = y^{1-\alpha}$ ter $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ in enačbo prevedemo na linearno enačbo.

Eksaktna enačba: $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ in velja $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Obstaja taka funkcija $z(x, y)$, da je $\mathrm{d}z = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$. Splošna rešitev je dana implicitno z enačbo $z(x, y) = C$.

Ortogonalne trajektorije:

Dana je 1-parametrična družina krivulj $F(x, y, C) = 0$. Ortogonalne trajektorije so vse krivulje, ki sekajo to družino pod pravim kotom. Konstrukcija nove diferencialne enačbe

$$F(x, y, C) = 0 \rightsquigarrow y' = f(x, y) \rightsquigarrow y'_T = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

1. Kateri diferencialni enačbi pripada družina krožnic $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$?

   Ker imamo v rešitvi tri parametre a, b in r, je pripadajoča diferencialna enačba tretjega reda. Družino krožnic trikrat odvajamo, da se znebimo vseh treh parametrov. Prvi odvod

   $$2(x-a) + 2(y-b)y' = 0 \;\Rightarrow\; x + (y-b)y' = a.$$

   Drugi odvod

   $$1 + (y')^2 + (y-b)y'' = 0.$$

   Tretji odvod

   $$2y'y'' + y'y'' + (y-b)y''' = 0.$$

   Parametra b se znebimo tako, da iz zadnje enačbe izrazimo $y - b = -\frac{3y'y''}{y'''}$ in to vstavimo v predzadnjo enačbo. Dobimo

   $$y''' + (y')^2 y''' - 3y'(y'')^2 = 0.$$

2. Pokažite, da je družina funkcij $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$ rešitev diferencialne enačbe $y'' - 3y' + 2y = 0$.

   Funkcijo dvakrat odvajamo

   $$\begin{aligned} y' &= C_1\mathrm{e}^x + 2C_2\mathrm{e}^{2x}, \\ y'' &= C_1\mathrm{e}^x + 4C_2\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

   in vstavimo v diferencialno enačbo

   $$C_1\mathrm{e}^x + 4C_2\mathrm{e}^{2x} - 3C_1\mathrm{e}^x - 6C_2\mathrm{e}^{2x} + 2C_1\mathrm{e}^x + 2C_2\mathrm{e}^{2x} = 0.$$

   Ker je leva stran enaka desni, je dana družina funkcij rešitev dane diferencialne enačbe.

3. Določite tisto funkcijo iz družine $y = C_1 \sin(x - C_2)$, ki zadošča začetnima pogojema $y(\pi) = 1$ in $y'(\pi) = 0$.

   Najprej odvajamo $y' = C_1 \cos(x - C_2)$ in nato vstavimo oba začetna pogoja

$$\begin{aligned} y(\pi) &= C_1 \sin(\pi - C_2) = 1, \\ y'(\pi) &= C_1 \cos(\pi - C_2) = 0. \end{aligned}$$

   Enačbi delimo in dobimo $\mathrm{tg}(\pi - C_2) = \infty$. To je res, ko je $\pi - C_2 = \frac{\pi}{2}$, sledi $C_2 = \frac{\pi}{2}$. To vstavimo v prvo enačbo in dobimo $C_1 = 1$. Zato je

$$y(x) = \sin\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

4. Rešite diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama $y' + y^2 \sin x = 0$.

   Najprej ločimo spremenljivki in integriramo, nato izrazimo y.

$$\begin{aligned} y' &= -y^2 \sin x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y^2 \sin x \\ \int y^{-2}\,\mathrm{d}y &= -\int \sin x\,\mathrm{d}x \\ -y^{-1} &= \cos x + C \\ y &= -\frac{1}{\cos x + C} \end{aligned}$$

5. Rešite diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama $y' = 2x\sqrt{y}$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x\sqrt{y} \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} &= \int 2x\,\mathrm{d}x \\ 2y^{\frac{1}{2}} &= x^2 + C \\ y &= \frac{(x^2 + C)^2}{4} \end{aligned}$$

6. Rešite diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama $y' = \mathrm{e}^{x+y}$ z začetnim pogojem $y(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y \\ \int \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y &= \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ -\mathrm{e}^{-y} &= \mathrm{e}^x - C \\ y &= -\ln(-\mathrm{e}^x + C) \end{aligned}$$

   Vstavimo še začetni pogoj in dobimo $y(0) = -\ln(-\mathrm{e}^0 + C) = -\ln(-1 + C) = 1$, od koder sledi $C = 1 + \mathrm{e}^{-1}$. Rešitev začetnega problema je

$$y(x) = -\ln(-\mathrm{e}^x + 1 + \mathrm{e}^{-1}).$$

7. Rešite diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama $y'\sqrt{4 + x^2} + xy + x = 0$ z začetnim pogojem $y(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{x(y+1)}{\sqrt{4 + x^2}} \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y+1} &= -\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4 + x^2}} \\ \ln(y+1) &= -\sqrt{4 + x^2} + \ln C \\ y &= C\mathrm{e}^{-\sqrt{4+x^2}} - 1 \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je z uvedbo nove spremenljivke $t = 4 + x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ integral na desni enak

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} = \sqrt{4+x^2}$$

Vstavimo še začetni pogoj in dobimo $y(0) = C\mathrm{e}^{-2} - 1 = 1$, od koder sledi $C = 2\mathrm{e}^2$. Rešitev začetnega problema je

$$y(x) = 2\mathrm{e}^{2-\sqrt{4+x^2}} - 1.$$

8. Na travniku živi kolonija zajcev, katerih število iz roda v rod narašča. Zanima nas, kako narašča število zajcev, če je število potomcev linearno odvisno od števila prednikov? Kaj pa, če začne trave na travniku zmanjkovati? Recimo, da lahko travnik preživi največ b zajcev.

V prvem primeru rešujemo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama $y' = ky$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= ky \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int k\,\mathrm{d}t \\
\ln y &= kt + \ln C \\
y(t) &= C\mathrm{e}^{kt}
\end{aligned}$$

Opazimo, da v primeru, ko je travnik neomejeno velik, število zajcev narašča eksponentno. Temu pravimo zakon naravne rasti. V drugem primeru rešujemo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama $y' = ky(b-y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= ky(b-y) \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y(b-y)} &= \int k\,\mathrm{d}t \\
\tfrac{1}{b}\ln\tfrac{y}{b-y} &= kt + \tfrac{1}{b}\ln C \\
\tfrac{y}{b-y} &= C\mathrm{e}^{bkt} \\
y &= bC\mathrm{e}^{bkt} - yC\mathrm{e}^{bkt} \\
y(t) &= \frac{bC\mathrm{e}^{bkt}}{1 + C\mathrm{e}^{bkt}}
\end{aligned}$$

Integral racionalne funkcije na levi rešimo z uporabo metode parcialnih ulomkov

$$\frac{1}{y(b-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{b-y} = \frac{Ab + (B-A)y}{y(b-y)},$$

kjer je $A = B = \frac{1}{b}$. Sledi

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(b-y)} = \frac{1}{b}\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b-y}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{b}\left(\ln y - \ln(b-y)\right) = \frac{1}{b}\ln\frac{y}{b-y}.$$

9. Rešite homogeno diferencialno enačbo $xy' - y = x\mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

Diferencialno enačbo najprej delimo z x, da se prepričamo, da je res homogena. Nato uporabimo opisano substitucijo $u = \frac{y}{x}$ ter $y' = xu' + u$ in rešimo tako dobljeno enačbo z ločitvijo spremenljivk.

$$\begin{aligned}
y' &= \tfrac{y}{x} + \mathrm{tg}\tfrac{y}{x} \\
xu' + u &= u + \mathrm{tg}u \\
\int \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{tg}u} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\ln(\sin u) &= \ln x + \ln C \\
\sin u &= Cx \\
u &= \arcsin(Cx)
\end{aligned}$$

Posebej izračunamo integral

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{tg}u} = \int \frac{\cos u \, \mathrm{d}u}{\sin u} = \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \ln v = \ln(\sin u),$$

kjer za novo spremenljivko vzamemo $v = \sin u$, $\mathrm{d}v = \cos u \, \mathrm{d}u$. Uporabimo še obratno substitucijo in dobimo rešitev

$$y(x) = x \arcsin(Cx).$$

10. Rešite homogeno diferencialno enačbo $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ z začetnim pogojem $y(1) = 1$.

Diferencialno enačbo najprej delimo z x in nato uporabimo opisano substitucijo.

$$\begin{aligned} y' &= \tfrac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\tfrac{y}{x}\right)^2} \\ xu' + u &= u + \sqrt{1 - u^2} \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \arcsin u &= \ln x + C \\ u &= \sin(\ln x + C) \end{aligned}$$

Z uporabo obratne substitucije dobimo rešitev

$$y(x) = x \sin(\ln x + C).$$

Iz začetnega pogoja $y(1) = \sin C = 1$ sledi $C = \frac{\pi}{2}$ in zato

$$y(x) = x \sin\left(\ln x + \tfrac{\pi}{2}\right).$$

11. Rešite linearno diferencialno enačbo $xy' - 2y = 2x^4$ z začetnim pogojem $y(1) = 3$.

Najprej rešimo homogeni del z ločitvijo spremenljivk.

$$\begin{aligned} xy' - 2y &= 0 \\ x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2y \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x} \\ \ln y &= 2 \ln x + \ln C \\ y_H &= Cx^2 \end{aligned}$$

Nato pa z variacijo konstante izračunamo še partikularno rešitev. Nastavek za rešitev in odvod

$$\begin{aligned} y &= C(x)x^2, \\ y' &= C'(x)x^2 + 2C(x)x \end{aligned}$$

vstavimo v prvotno enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} C'(x)x^3 + 2C(x)x^2 - 2C(x)x^2 &= 2x^4 \\ C'(x) &= 2x \\ C(x) &= \int 2x \, \mathrm{d}x = x^2. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je

$$y_P = C(x)x^2 = x^4.$$

Splošna rešitev linearne enačbe je vsota partikularne rešitve in rešitve homogenega dela

$$y(x) = y_P + y_H = x^4 + Cx^2.$$

Vstavimo še začetni pogoj $y(1) = 1 + C = 3$ in dobimo $C = 2$, torej je rešitev začetnega problema

$$y(x) = x^4 + 2x^2.$$

12. Rešite linearno diferencialno enačbo $y' - \frac{1}{x}y = x^2 \ln x$ z začetnim pogojem $y(1) = \frac{3}{4}$.

Homogeni del.

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{x}y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y}{x} \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \ln y &= \ln x + \ln C \\ y_H &= Cx \end{aligned}$$

Nastavek za partikularno rešitev in odvod

$$\begin{aligned} y &= C(x)x, \\ y' &= C'(x)x + C(x) \end{aligned}$$

vstavimo v prvotno enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} C'(x)x + C(x) - C(x) &= x^2 \ln x \\ C'(x) &= x \ln x \\ C(x) &= \int x \ln x \,\mathrm{d}x = \tfrac{x^2}{2} \ln x - \textstyle\int \tfrac{x}{2} \,\mathrm{d}x = \tfrac{x^2}{2} \ln x - \tfrac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

Zadnji integral izračunamo z metodo per partes: $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $v = \frac{x^2}{2}$. Partikularna rešitev je

$$y_P = C(x)x = \tfrac{x^3}{2} \ln x - \tfrac{x^3}{4},$$

splošna rešitev pa

$$y(x) = y_P + y_H = \tfrac{x^3}{2} \ln x - \tfrac{x^3}{4} + Cx.$$

Vstavimo še začetni pogoj $y(1) = -\frac{1}{4} + C = \frac{3}{4}$ in dobimo $C = 1$, torej je rešitev začetnega problema

$$y(x) = \tfrac{x^3}{2} \ln x - \tfrac{x^3}{4} + x.$$

13. Rešite linearno diferencialno enačbo $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

Homogeni del.

$$\begin{aligned} x^2 y' + xy &= 0 \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{-\mathrm{d}x}{x} \\ \ln y &= -\ln x + \ln C \\ y_H &= \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Nastavek za partikularno rešitev in odvod

$$\begin{aligned} y &= \frac{C(x)}{x}, \\ y' &= \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} \end{aligned}$$

vstavimo v prvotno enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} C'(x)x - C(x) + C(x) + 1 &= 0 \\ C'(x) &= -\frac{1}{x} \\ C(x) &= -\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = -\ln x. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je

$$y_P = \frac{C(x)}{x} = -\frac{\ln x}{x},$$

splošna rešitev pa

$$y(x) = y_P + y_H = \frac{C - \ln x}{x}.$$

14. Rešite linearno diferencialno enačbo $y' - 2y = 2\mathrm{e}^{4x}$ z začetnim pogojem $y(0) = 0$.

Homogeni del.

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 0 \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 2\,\mathrm{d}x \\ \ln y &= 2x + \ln C \\ y_H &= C\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

Nastavek za partikularno rešitev in odvod

$$\begin{aligned} y &= C(x)\mathrm{e}^{2x}, \\ y' &= C'(x)\mathrm{e}^{2x} + 2C(x)\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

vstavimo v prvotno enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{2x} + 2C(x)\mathrm{e}^{2x} - 2C(x)\mathrm{e}^{2x} &= 2\mathrm{e}^{4x} \\ C'(x) &= 2\mathrm{e}^{2x} \\ C(x) &= \int 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je

$$y_P = C(x)\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{4x},$$

splošna rešitev pa

$$y(x) = y_P + y_H = \mathrm{e}^{4x} + C\mathrm{e}^{2x}.$$

Vstavimo še začetni pogoj $y(0) = 1 + C = 0$ in dobimo $C = -1$, torej je rešitev začetnega problema

$$y(x) = \mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{2x}.$$

15. Rešite Bernoullijevo diferencialno enačbo $(x+1)y' - y = (x+1)y^{-1}$.

Enačba je Bernoullijeva z $\alpha = -1$. Najprej jo delimo z $y^\alpha = y^{-1}$ in dobimo

$$(x+1)yy' - y^2 = x + 1.$$

Nato pa uporabimo substitucijo $u = y^2$ in $u' = 2yy'$ in dobimo linearno enačbo

$$\frac{x+1}{2}u' - u = x + 1.$$

Homogeni del rešimo z ločitvijo spremenljivk.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2}u' - u &= 0 \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x+1} \\ \ln u &= 2\ln(x+1) + \ln C \\ u_H &= C(x+1)^2 \end{aligned}$$

Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstante, kjer

$$\begin{aligned} u &= C(x)(x+1)^2, \\ u' &= C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1) \end{aligned}$$

vstavimo v linearno enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} x+1 &= \frac{(x+1)^3}{2}C'(x) + C(x)(x+1)^2 - C(x)(x+1)^2 \\ C'(x) &= \frac{2}{(x+1)^2} \\ C(x) &= \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = -\frac{2}{x+1}. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je

$$u_P = C(x)(x+1)^2 = -2(x+1),$$

splošna rešitev pa

$$u(x) = u_P + u_H = -2(x+1) + C(x+1)^2.$$

Uporabimo še obratno substitucijo, da dobimo rešitev za $y = \sqrt{u}$

$$y(x) = \pm\sqrt{-2(x+1) + C(x+1)^2}.$$

16. Rešite Bernoullijevo diferencialno enačbo $y' + y = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} y^{\frac{2}{3}}$.

Enačba je Bernoullijeva z $\alpha = \frac{1}{3}$. Najprej jo delimo z $y^\alpha = y^{\frac{1}{3}}$ in dobimo

$$y^{-\frac{2}{3}} y' + y^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}.$$

Nato pa uporabimo substitucijo $u = y^{\frac{1}{3}}$ in $u' = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} y'$ in dobimo linearno enačbo

$$3u' + u = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}.$$

Homogeni del rešimo z ločitvijo spremenljivk.

$$\begin{aligned} 3u' + u &= 0 \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -\tfrac{1}{3}\int \mathrm{d}x \\ \ln u &= -\tfrac{1}{3}x + \ln C \\ u_H &= C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} \end{aligned}$$

Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstante, kjer

$$\begin{aligned} u &= C(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}, \\ u' &= C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} - \tfrac{1}{3}C(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} \end{aligned}$$

vstavimo v linearno enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} &= 3C'(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} - C(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + C(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} \\ C'(x) &= \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^x \\ C(x) &= \int \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je

$$u_P = \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} = \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x},$$

splošna rešitev pa

$$u(x) = u_P + u_H = \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}.$$

Uporabimo še obratno substitucijo, da dobimo rešitev za $y = u^3$

$$y(x) = \left(\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} + C\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right)^3.$$

17. Ali je diferencialna enačba $2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = 0$ eksaktna? Če je eksaktna, jo rešite.

Diferencialna enačba je eksaktna, če velja $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Ker je $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ in $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, je ta pogoj izpolnjen. Da dobimo rešitev $z(x,y) = 0$, najprej uporabimo enačbo $z_x = P(x,y)$

$$z = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int 2xy\,\mathrm{d}x = x^2 y + C(y).$$

Nato uporabimo še enakost $z_y = Q(x,y)$ in dobimo

$$\begin{aligned} x^2 + C'(y) &= x^2 - y^2 \\ C'(y) &= -y^2 \\ C(y) &= -\int y^2\,\mathrm{d}y = -\tfrac{y^3}{3} + D. \end{aligned}$$

Splošna rešitev je

$$z(x,y) = x^2 y - \tfrac{y^3}{3} + D = 0.$$

18. Ali je diferencialna enačba $(4y + 2x - 5)\,\mathrm{d}x + (6y + 4x - 1)\,\mathrm{d}y = 0$ eksaktna? Če je eksaktna, jo rešite z začetnim pogojem $y(-1) = 2$.

Diferencialna enačba je eksaktna, če velja $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Ker je $\frac{\partial P}{\partial y} = 4$ in $\frac{\partial Q}{\partial x} = 4$, je ta pogoj izpolnjen. Da dobimo rešitev $z(x,y) = 0$, najprej uporabimo enačbo $z_x = P(x,y)$

$$z = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (4y + 2x - 5)\,\mathrm{d}x = 4xy + x^2 - 5x + C(y).$$

Nato uporabimo še enakost $z_y = Q(x,y)$ in dobimo

$$\begin{aligned} 4x + C'(y) &= 6y + 4x - 1 \\ C'(y) &= 6y - 1 \\ C(y) &= \int (6y - 1)\,\mathrm{d}y = 3y^2 - y. \end{aligned}$$

Splošna rešitev je

$$z(x,y) = 4xy + x^2 - 5x + 3y^2 - y = D.$$

Iz začetnega pogoja sledi $D = 8$ in zato

$$4xy + x^2 - 5x + 3y^2 - y = 8.$$

19. Določite parameter a tako, da bo enačba $(4xy + 3y^2)\,\mathrm{d}x + (3x^2 + 4xy)\,\mathrm{d}y = 0$, pomnožena z $(xy)^a$, eksaktna, in jo rešite.

Originalna diferencialna enačba brez množenja ni eksaktna, kar se lahko takoj prepričamo. Zapišimo P in Q po množenju z $x^a y^a$

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 4x^{a+1}y^{a+1} + 3x^a y^{a+2}, \\ Q(x,y) &= 3x^{a+2}y^a + 4x^{a+1}y^{a+1} \end{aligned}$$

in odvajamo

$$\begin{aligned} P_y(x,y) &= 4(a+1)x^{a+1}y^a + 3(a+2)x^a y^{a+1}, \\ Q_x(x,y) &= 3(a+2)x^{a+1}y^a + 4(a+1)x^a y^{a+1}. \end{aligned}$$

To dvoje izenačimo in poračunamo

$$\begin{aligned} 4(a+1)x^{a+1}y^a + 3(a+2)x^a y^{a+1} &= 3(a+2)x^{a+1}y^a + 4(a+1)x^a y^{a+1} \\ 4(a+1)x + 3(a+2)y &= 3(a+2)x + 4(a+1)y \\ 4(a+1)(x-y) &= 3(a+2)(x-y) \\ (x-y)(a-2) &= 0. \end{aligned}$$

Torej je diferencialna enačba eksaktna, ko je $a = 2$. Poiščimo še rešitev

$$z = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int (4x^3y^3 + 3x^2y^4)\,\mathrm{d}x = x^4y^3 + x^3y^4 + C(y)$$

$$\begin{aligned} z_y = 3x^4y^2 + 4x^3y^3 + C'(y) &= 3x^4y^2 + 4x^3y^3 \\ C'(y) &= 0 \\ C(y) &= D \end{aligned}$$

Splošna rešitev je

$$z(x,y) = x^4y^3 + x^3y^4 + D = 0.$$

20. Dana je družina krivulj $y = C(x^2+1)$. Poiščite ortogonalne trajektorije.

Najprej odvajamo in se znebimo konstante $C = \frac{y}{x^2+1}$

$$y' = 2Cx = \frac{2xy}{x^2+1}.$$

Nato sestavimo novo diferencialno enačbo po danem pravilu

$$y_t' = -\frac{x^2+1}{2xy}.$$

To je enačba z ločljivima spremenljivkama, katere rešitve so ortogonalne trajektorije

$$\begin{aligned} y' &= -\tfrac{x^2+1}{2xy} \\ \int 2y\,\mathrm{d}y &= -\int \left(x + \tfrac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x \\ y^2 + \left(\tfrac{x^2}{2} + \ln x\right) &= D. \end{aligned}$$

21. Dana je družina krivulj $y = Cx$. Poiščite ortogonalno trajektorijo, ki gre skozi točko $T(1,1)$.

Najprej odvajamo in se znebimo konstante $C = \frac{y}{x}$

$$y' = C = \frac{y}{x}.$$

Nato sestavimo novo diferencialno enačbo po danem pravilu

$$y_t' = -\frac{x}{y}.$$

To je enačba z ločljivima spremenljivkama, katere rešitve so ortogonalne trajektorije

$$\begin{aligned} y' &= -\tfrac{x}{y} \\ \int y\,\mathrm{d}y &= -\int x\,\mathrm{d}x \\ \tfrac{y^2}{2} &= -\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{D}{2} \\ x^2 + y^2 &= D. \end{aligned}$$

Iz začetnega pogoja dobimo $D = 2$. Ortogonalna trajektorija skozi dano točko je krožnica

$$x^2 + y^2 = 2.$$

22. Dana je družina krivulj $x+y = C\mathrm{e}^y$. Poiščite ortogonalno trajektorijo, ki gre skozi točko $T(0,5)$.

Najprej implicitno odvajamo in se znebimo konstante C

$$1 + y' = C\mathrm{e}^y y' = (x+y)y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{1-x-y}.$$

Nato sestavimo novo diferencialno enačbo po danem pravilu

$$y_t^{'} = 1 - x - y.$$

To je linearna diferencialna enačba $y' + y = 1 - x$. Rešitve so ortogonalne trajektorije. Najprej homogeni del.

$$\begin{aligned} y' + y &= 0 \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\mathrm{d}x \\ \ln y &= -x + \ln D \\ y_H &= D\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Nato še partikularna rešitev, kjer

$$\begin{aligned} y &= D(x)\mathrm{e}^{-x}, \\ y' &= D'(x)\mathrm{e}^{-x} - D(x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

vstavimo v enačbo, integral pa izračunamo per partes ($u = 1-x$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, $v = \mathrm{e}^x$)

$$\begin{aligned} 1 - x &= D'(x)\mathrm{e}^{-x} - D(x)\mathrm{e}^{-x} + D(x)\mathrm{e}^{-x} \\ D'(x) &= (1-x)\mathrm{e}^x \\ D(x) &= \int (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (1-x)\mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (2-x)\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je

$$y_P = D(x)\mathrm{e}^{-x} = 2 - x,$$

splošna rešitev pa

$$y(x) = y_P + y_H = 2 - x + D\mathrm{e}^{-x}.$$

Iz začetnega pogoja dobimo $D = 3$. Ortogonalna trajektorija, ki gre skozi dano točko je

$$y(x) = 2 - x + 3\mathrm{e}^{-x}.$$

DIFERENCIALNE ENAČBE VIŠJEGA REDA

Linearne diferencialne enačbe drugega reda:

Linearna diferencialna enačba 2. reda: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$.

Rešitev zapišemo v obliki $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$.

Homogena linearna diferencialna enačba 2. reda je $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$. Če sta y_1 in y_2 dve linearno neodvisni rešitvi, potem je $\alpha y_1 + \beta y_2$ tudi rešitev. Splošna rešitev HLDE 2. reda je 2-parametrična družina $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

HLDE 2. reda s konstantnimi koeficienti $y'' + py' + qy = 0$, $p, q =$ konst. rešujemo z nastavkom $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Dobimo karaktristično (kvadratno) enačbo, ki ima tri možne tipe rešitev, zato zapišemo rešitev homogenega dela na tri različne načine:

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$,

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$: $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{\lambda x}$,

c) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$: $y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

Partikularno rešitev nehomogene LDE 2. reda s konstantnimi koeficienti $y'' + py' + qy = r(x)$ dobimo z metodo variacije konstante ali z metodo inteligentnega ugibanja, kjer nastavek uganemo glede na obliko desne strani $r(x)$:

a) $r(x)$ polinom stopnje $n \;\Rightarrow\; y_p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$,

b) $r(x) = \sin ax$ ali $r(x) = \cos ax \;\Rightarrow\; y_p(x) = A\sin ax + B\cos ax$,

c) $r(x) = \mathrm{e}^{ax} \;\Rightarrow\; y_p(x) = A\mathrm{e}^{ax}$.

Eulerjevo enačbo 2. reda $x^2y''+pxy'+qy = 0$, $p, q =$ konst. rešujemo z nastavkom $y(x) = x^\lambda$. Dobimo karaktristično (kvadratno) enačbo, ki ima tri možne tipe rešitev, zato zapišemo rešitev homogenega dela na tri različne načine:

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $y = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2}$,

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$: $y = (C_1 + C_2 \ln x)x^\lambda$,

c) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$: $y = x^\alpha(C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x))$.

Metode za zniževanje reda nelinearnih diferencialnih enačb:

1. V enačbi ne nastopa odvisna spremenljivka y: $F(x, y', y'') = 0$. Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = y'$.
2. V enačbi ne nastopa odvisna spremenljivka x: $F(y, y', y'') = 0$. Uvedemo novo neodvisno spremenljivko y in novo odvisno spremenljivko $u = y' = u(y)$, kjer je $y'' = u\dot{u}$.

Sistemi diferencialnih enačb:

Sisteme linearnih diferencialnih enačb rešujemo s podobnimi nastavki kot linearne diferencialne enačbe višjega reda: $x(t) = A\mathrm{e}^{\lambda t}$, $y(t) = B\mathrm{e}^{\lambda t}$.

1. Dana je diferencialna enačba $y'' + y = 0$ z rešitvama $y_1 = \sin x$ in $y_2 = \cos x$. Preverite, da je vsaka linearna kombinacija y_1 in y_2 tudi rešitev te diferencialne enačbe.

   Linearno kombinacijo $y = Ay_1 + By_2 = A\sin x + B\cos x$ dvakrat odvajamo in vstavimo v diferencialno enačbo

$$\begin{aligned} y' &= A\cos x - B\sin x, \\ y'' &= -A\sin x - B\cos x. \end{aligned}$$

Ker je
$$y'' + y = -A\sin x - B\cos x + A\sin x + B\cos x = 0,$$
je linearna kombinacija rešitev tudi rešitev.

2. Rešite homogeno linearno DE 2. reda s konstantnimi koeficienti $y'' - 4y' + 3y = 0$.

   Homogeno linearno diferencialno enačbo 2. reda s konstantnimi koeficienti rešujemo z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Ker je $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$ in $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$, dobimo karakteristično kvadratno enačbo
$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0,$$
   ki ima dve različni realni ničli $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 3$. Dobimo dve rešitvi $y_1 = \mathrm{e}^x$ in $y_2 = \mathrm{e}^{3x}$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je
$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{3x}.$$

3. Rešite homogeno linearno DE 2. reda s konstantnimi koeficienti $y'' + 4y = 0$.

   Uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično kvadratno enačbo
$$\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2\mathrm{i})(\lambda + 2\mathrm{i}) = 0,$$
   ki ima dve konjugirano kompleksni ničli $\lambda_1 = 2\mathrm{i}$ in $\lambda_2 = -2\mathrm{i}$. Dobimo dve rešitvi $y_1 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ in $y_2 = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$. Ker bi želeli realno rešitev enačbe z realnimi koeficienti, uporabimo Eulerjevo formulo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ in dobimo
$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + C_2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} \\ &= C_1(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x) + C_2(\cos 2x - \mathrm{i}\sin 2x) \\ &= D_1 \cos 2x + D_2 \sin 2x. \end{aligned}$$

4. Rešite homogeno linearno DE 2. reda s konstantnimi koeficienti $y'' - 2y' + y = 0$.

   Uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično kvadratno enačbo
$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0,$$
   ki ima eno dvojno realno ničlo $\lambda_{1,2} = 1$. Dobimo eno rešitev $y_1 = \mathrm{e}^x$. Drugo rešitev, ki mora biti neodvisna od prve, dobimo tako, da prvo množimo z x: $y_2 = x\mathrm{e}^x$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je
$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 x \mathrm{e}^x.$$

5. Rešite homogeno Eulerjevo enačbo $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$.

   Eulerjevo enačbo rešujemo z nastavkom $y = x^\lambda$. Ker je $y' = \lambda x^{\lambda-1}$ in $y'' = \lambda(1-\lambda)x^{\lambda-2}$, dobimo karakteristično kvadratno enačbo
$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0,$$
   ki ima dve različni realni ničli $\lambda_1 = 3$ in $\lambda_2 = -1$. Dobimo dve rešitvi $y_1 = x^3$ in $y_2 = x^{-1}$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je
$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x^3 + C_2 x^{-1}.$$

6. Rešite homogeno Eulerjevo enačbo $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$.

   Uporabimo nastavek $y = x^\lambda$ in dobimo karakteristično kvadratno enačbo
$$\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$

ki ima dve konjugirano kompleksni ničli $\lambda_1 = -1 + 2\mathrm{i}$ in $\lambda_2 = -1 - 2\mathrm{i}$. Dobimo dve rešitvi $y_1 = x^{-1+2\mathrm{i}}$ in $y_2 = x^{-1-2\mathrm{i}}$. Ker bi želeli realno rešitev enačbe z realnimi koeficienti, uporabimo Eulerjevo formulo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ in dobimo

$$y(x) = C_1\frac{\cos(2\ln x)}{x} + C_2\frac{\sin(2\ln x)}{x}.$$

7. Rešite homogeno Eulerjevo enačbo $x^2y'' - xy' + y = 0$.

   Uporabimo nastavek $y = x^\lambda$ in dobimo karakteristično kvadratno enačbo

$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0,$$

   ki ima eno dvojno realno ničlo $\lambda_{1,2} = 1$. Dobimo eno rešitev $y_1 = x$. Drugo rešitev, ki mora biti neodvisna od prve, dobimo tako, da prvo množimo z $\ln x$: $y_2 = x\ln x$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je

$$y(x) = C_1x + C_2x\ln x.$$

8. Z variacijo konstante rešite nehomogeno linearno DE 2. reda s konstantnimi koeficienti

$$y'' - y = 2\mathrm{e}^x.$$

   Najprej rešimo homogeni del $y'' - y = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 - 1 = 0$ z rešitvama $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -1$. Torej je

$$y_H = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

   Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstante na podoben način kot pri linearnih DE 1. reda. Vzamemo rešitev homogenega dela, kjer konstanti postaneta funkciji x

$$y = C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2(x)\mathrm{e}^{-x}$$

   in odvajamo

$$y' = C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} - C_2(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Tu imamo na voljo še eno prosto enačbo, zato lahko izberemo $C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$, torej je prvi odvod enak $y' = C_1(x)\mathrm{e}^x - C_2(x)\mathrm{e}^{-x}$, drugi odvod pa

$$y'' = C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_1(x)\mathrm{e}^x - C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} + C_2(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Vse skupaj vstavimo v nehomogeno enačbo in dobimo

$$C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_1(x)\mathrm{e}^x - C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} + C_2(x)\mathrm{e}^{-x} - C_1(x)\mathrm{e}^x - C_2(x)\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^x.$$

   Dobimo sistem dveh diferencialnih enačb z dvema neznanima funkcijama

$$\begin{aligned} C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} &= 0, \\ C_1'(x)\mathrm{e}^x - C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} &= 2\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

   Ti dve enačbi seštejemo in dobimo $2C_1'(x)\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$, oz. $C_1'(x) = 1$. Od tod sledi, da je $C_1(x) = x$. Nato ti dve enačbi še odštejemo in dobimo $2C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = -2\mathrm{e}^x$, oz. $C_2'(x) = -\mathrm{e}^{2x}$. Od tod sledi, da je $C_2(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$. Zato je partikularna rešitev

$$y_P = x\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x.$$

   Splošna rešitev je vsota partikularne rešitve in rešitve homogenega dela

$$y(x) = y_P + y_H = x\mathrm{e}^x - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^x + C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

9. Z variacijo konstante rešite nehomogeno linearno DE 2. reda s konstantnimi koeficienti

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Najprej rešimo homogeni del $y'' + y = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 + 1 = 0$ z rešitvama $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}$. Torej je

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstante na podoben način kot pri linearnih DE 1. reda. Vzamemo rešitev homogenega dela, kjer konstanti postaneta funkciji x

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

in odvajamo

$$y' = C_1'(x) \cos x - C_1(x) \sin x + C_2'(x) \sin x + C_2(x) \cos x.$$

Tu imamo na voljo še eno prosto enačbo, zato lahko izberemo $C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0$, torej je prvi odvod enak $y' = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$, drugi odvod pa

$$y'' = -C_1'(x) \sin x - C_1(x) \cos x + C_2'(x) \cos x - C_2(x) \sin x.$$

Vse skupaj vstavimo v nehomogeno in dobimo

$$-C_1'(x) \sin x - C_1(x) \cos x + C_2'(x) \cos x - C_2(x) \sin x + C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x = \tfrac{1}{\sin x}.$$

Dobimo sistem

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x &= 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x &= \tfrac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Prvo enačbo pomnožimo z $\sin x$, drugo z $\cos x$, ju seštejemo in dobimo

$$C_2'(x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Z integriranjem (uvedba nove spremenljivke $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$) dobimo

$$C_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t = \ln(\sin x).$$

Izraz za $C_2'(x)$ vstavimo v prvo enačbo in dobimo $C_1'(x) = -1$ od koder sledi $C_1(x) = -x$. Partikularna rešitev je

$$y_P = -x \cos x + \ln(\sin x) \sin x.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = y_P + y_H = -x \cos x + \ln(\sin x) \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

10. Z nastavkom rešite nehomogeno linearno DE 2. reda s konstantnimi koeficienti

$$y'' - 2y' - 3y = x^2.$$

Najprej rešimo homogeni del $y'' - 2y' - 3y = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ z rešitvama $\lambda_1 = 3$ in $\lambda_2 = -1$. Torej je

$$y_H = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{-x}.$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom, ki je polinom druge stopnje, saj je funkcija $r(x) = x^2$ polinom druge stopnje

$$y_P = Ax^2 + Bx + C.$$

Nastavek dvakrat odvajamo

$$\begin{aligned} y_P' &= 2Ax + B, \\ y_P'' &= 2A, \end{aligned}$$

vstavimo v enačbo in dobimo

$$2A - 4Ax - 2B - 3Ax^2 - 3Bx - 3C = x^2.$$

Iz primerjave koeficientov pri istih potencah sledi sistem enačb $-3A = 1$, $-4A - 3B = 0$ in $2A - 2B - 3C = 0$, ki ima rešitev $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{4}{9}$ in $C = -\frac{14}{27}$. Partikularna rešitev je

$$y_P = -\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{4}{9}x - \tfrac{14}{27}.$$

Splošna rešitev je vsota partikularne rešitve in rešitve homogenega dela

$$y(x) = y_P + y_H = -\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{4}{9}x - \tfrac{14}{27} + C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{-x}.$$

11. Z nastavkom rešite nehomogeno linearno DE 2. reda s konstantnimi koeficienti

$$y'' - 2y' + y = -5 \sin 2x.$$

Najprej rešimo homogeni del $y'' - 2y' + y = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ z dvojno rešitvijo $\lambda_{1,2} = 1$. Torej je

$$y_H = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 x \mathrm{e}^x.$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom

$$y_P = A \sin 2x + B \cos 2x,$$

ki ga dvakrat odvajamo

$$\begin{aligned} y_P' &= 2A \cos 2x - 2B \sin 2x, \\ y_P'' &= -4A \sin 2x - 4B \cos 2x, \end{aligned}$$

vstavimo v enačbo in dobimo

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x - 4A \cos 2x + 4B \sin 2x + A \sin 2x + B \cos 2x = -5 \sin 2x.$$

Iz primerjave koeficientov pri istih funkcijah sledi sistem enačb $-3A + 4B = -5$ in $-4A - 3B = 0$, ki ima rešitev $A = \frac{3}{5}$ in $B = -\frac{4}{5}$. Partikularna rešitev je

$$y_P = \tfrac{3}{5} \sin 2x - \tfrac{4}{5} \cos 2x.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = y_P + y_H = \tfrac{3}{5} \sin 2x - \tfrac{4}{5} \cos 2x + C_1 \mathrm{e}^x + C_2 x \mathrm{e}^x.$$

12. Rešite diferencialno enačbo

$$y'' + 2y' + 5y = 2\mathrm{e}^{3x}$$

skupaj z začetnima pogojema $y(0) = \frac{11}{10}$ in $y'(0) = \frac{33}{10}$.

To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Najprej rešimo homogeni del $y'' + 2y' + 5y = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, ki ima dve konjugirano kompleksni rešitvi $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$. Torej

$$y_H = \mathrm{e}^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Partikularno rešitev dobimo z uporabo nastavka $y_P = C\mathrm{e}^{3x}$. Dvakrat odvajamo in dobimo $y_P' = 3C\mathrm{e}^{3x}$ in $y_P'' = 9C\mathrm{e}^{3x}$. To vstavimo v enačbo

$$9C\mathrm{e}^{3x} + 6C\mathrm{e}^{3x} + 5C\mathrm{e}^{3x} = 2\mathrm{e}^{3x}$$

in iz primerjave koeficientov dobimo $C = \frac{1}{10}$, torej je

$$y_P = \tfrac{1}{10}\mathrm{e}^{3x}.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = y_P + y_H = \tfrac{1}{10}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Rešitev še odvajamo in vstavimo začetne pogoje

$$y'(x) = \tfrac{3}{10}\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + \mathrm{e}^{-x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),$$

$$\begin{aligned} y(0) &= A + \tfrac{1}{10} = \tfrac{11}{10} & \Rightarrow \quad & A = 1, \\ y'(0) &= -A + 2B + \tfrac{3}{10} = \tfrac{33}{10} & \Rightarrow \quad & B = 2. \end{aligned}$$

Rešitev, ki ustreza začetnim pogojem, je

$$y(x) = \tfrac{1}{10}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x).$$

13. Z nastavkom rešite nehomogeno linearno DE 2. reda s konstantnimi koeficienti

$$y'' - 5y' - 6y = \cos x + \mathrm{e}^{2x}.$$

Najprej rešimo homogeni del $y'' - 5y' - 6y = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0$ z rešitvama $\lambda_1 = 6$ in $\lambda_2 = -1$. Torej je

$$y_H = C_1\mathrm{e}^{6x} + C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

Partikularno rešitev poiščemo z vsoto nastavkov za eksponentno in kosinusno funkcijo

$$y_P = A\cos x + B\sin x + C\mathrm{e}^{2x},$$

ki ga dvakrat odvajamo

$$\begin{aligned} y_P' &= -A\sin x + B\cos x + 2C\mathrm{e}^{2x}, \\ y_P'' &= -A\cos x - B\sin x + 4C\mathrm{e}^{2x}, \end{aligned}$$

vstavimo v enačbo in dobimo

$$-7A\cos x - 7B\sin x + 5A\sin x - 5B\cos x - 12C\mathrm{e}^{2x} = \cos x + \mathrm{e}^{2x}.$$

Iz primerjave koeficientov pri istih funkcijah sledi sistem enačb $-7A - 5B = 1$, $5A - 7B = 0$ in $-12C = 1$, ki ima rešitev $A = -\frac{7}{74}$, $B = -\frac{5}{74}$ in $C = -\frac{1}{12}$. Partikularna rešitev je

$$y_P = -\tfrac{7}{74}\cos x - \tfrac{5}{74}\sin x - \tfrac{1}{12}\mathrm{e}^{2x}.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = -\tfrac{7}{74}\cos x - \tfrac{5}{74}\sin x - \tfrac{1}{12}\mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{6x} + C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

14. Z nastavkom rešite nehomogeno linearno DE 2. reda s konstantnimi koeficienti

$$y'' - 2y' = 2\mathrm{e}^x$$

skupaj z začetnima pogojema $y(1) = -1$ in $y'(1) = 0$.

Najprej rešimo homogeni del $y'' - 2y' = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) = 0$ z rešitvama $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = 2$. Torej je

$$y_H = C_1 + C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

Partikularno rešitev poiščemo z eksponentnim nastavkom, saj je funkcija $r(x) = 2\mathrm{e}^x$ eksponentna

$$y_P = C\mathrm{e}^x.$$

Nastavek dvakrat odvajamo $y_P' = C\mathrm{e}^x$, $y_P'' = C\mathrm{e}^x$, vstavimo v enačbo in dobimo

$$C\mathrm{e}^x - 2C\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x.$$

Iz primerjave koeficientov sledi, da je $C = -2$. Partikularna rešitev je

$$y_P = -2\mathrm{e}^x.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = -2\mathrm{e}^x + C_1 + C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

Rešitev še odvajamo in vstavimo začetne pogoje

$$y'(x) = -2\mathrm{e}^x + 2C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

Ker je $y(1) = -2\mathrm{e} + C_1 + C_2\mathrm{e}^2 = -1$ in $y'(1) = -2\mathrm{e} + 2C_2\mathrm{e}^2 = 0$, je $C_2 = \mathrm{e}^{-1}$ in $C_1 = \mathrm{e} - 1$. Rešitev začetnega problema je

$$y(x) = \mathrm{e}^{2x-1} - 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e} - 1.$$

15. Rešite diferencialno enačbo

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$$

skupaj z začetnimi pogoji $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ in $y''(0) = 3$.

To je homogena linearna DE 3. reda s konstantnimi koeficienti, zato uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Dobimo karakterističen polinom $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$, ki ima trojno ničlo $\lambda_{1,2,3} = 1$. Torej je splošna rešitev

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x + C_3x^2\mathrm{e}^x,$$

ki jo še dvakrat odvajamo

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x + 2C_3x\mathrm{e}^x + C_3x^2\mathrm{e}^x, \\ y''(x) &= C_1\mathrm{e}^x + 2C_2\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x + 2C_3\mathrm{e}^x + 4C_3x\mathrm{e}^x + C_3x^2\mathrm{e}^x, \end{aligned}$$

vstavimo začetne pogoje in dobimo

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 1 && \Rightarrow \quad C_1 = 1 \\ y'(0) &= C_1 + C_2 = 3 && \Rightarrow \quad C_2 = 2 \\ y''(0) &= C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 3 && \Rightarrow \quad C_3 = -1 \end{aligned}$$

Rešitev diferencialne enačbe, ki ustreza začetnim pogojem, je

$$y(x) = \mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x - x^2\mathrm{e}^x.$$

16. Rešite Eulerjevo enačbo $x^3y''' - 3x^2y'' + 7xy' - 8y = 0$.

Uporabimo nastavek $y = x^\lambda$, ki ga trikrat odvajamo in vstavimo v enačbo, da dobimo karakteristični polinom

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 7\lambda - 8 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda-2)^3 = 0,$$

ki ima trojno ničlo $\lambda_{1,2,3} = 2$, zato je splošna rešitev

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x^2\ln x + C_3x^2\ln^2 x.$$

17. Rešite diferencialno enačbo $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{e}^x$.

Najprej rešimo homogeni del $y'' - 2y' + y = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0$ z dvojno rešitvijo $\lambda_{1,2} = 1$. Torej je

$$y_H = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x.$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y_P = Ax^2\mathrm{e}^x$, saj je 1 dvojna ničla karakterističnega polinoma enaka koeficientu v $r(x) = \mathrm{e}^x$. Nastavek dvakrat odvajamo $y_P' = 2Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x$, $y_P'' = 2A\mathrm{e}^x + 4Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x$, vstavimo v enačbo in dobimo

$$Ax^2\mathrm{e}^x + 4Ax\mathrm{e}^x + 2A\mathrm{e}^x - 4Ax\mathrm{e}^x - 2Ax^2\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x.$$

Od tod sledi, da je $A = 1$, zato je partikularna rešitev

$$y_P = x^2\mathrm{e}^x.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = x^2\mathrm{e}^x + C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x.$$

18. Rešite diferencialno enačbo $y''' - y' = x^2$.

Najprej rešimo homogeni del $y''' - y' = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$ z rešitvami $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = -1$. Torej je

$$y_H = C_1 + C_2\mathrm{e}^x + C_3\mathrm{e}^{-x}.$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y_P = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. Polinom je tu tretje in ne druge stopnje, ker je ena izmed ničel karakterističnega polinoma enaka 0. Nastavek trikrat odvajamo $y_P' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y_P'' = 6Ax + 2B$, $y_P''' = 6A$, vstavimo v enačbo in dobimo

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2.$$

Od tod sledi, da je $A = -\frac{1}{3}$, $B = 0$ in $C = -2$, zato je partikularna rešitev

$$y_P = -\tfrac{1}{3}x^3 - 2x.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = -\tfrac{1}{3}x^3 - 2x + C_1 + C_2\mathrm{e}^x + C_3\mathrm{e}^{-x}.$$

19. Rešite diferencialno enačbo $y''' + 2y'' - y' - 2y = 2 + 12\mathrm{e}^{2x}$.

Najprej rešimo homogeni del $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristično enačbo $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$ z rešitvami $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ in $\lambda_3 = 1$. Torej je

$$y_H = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\mathrm{e}^x.$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y_P = A + B\mathrm{e}^{2x}$, ki ga trikrat odvajamo $y_P^{'} = 2B\mathrm{e}^{2x}$, $y_P^{''} = 4B\mathrm{e}^{2x}$, $y_P^{'''} = 8B\mathrm{e}^{2x}$, vstavimo v enačbo in dobimo

$$12B\mathrm{e}^{2x} - 2A = 2 + 12\mathrm{e}^{2x}.$$

Iz primerjave koeficientov sledi, da je $A = -1$ in $B = 1$, zato je partikularna rešitev

$$y_P = -1 + \mathrm{e}^{2x}.$$

Splošna rešitev je

$$y(x) = -1 + \mathrm{e}^{2x} + C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\mathrm{e}^{x}.$$

20. Rešite enačbo $(1-x^2)y'' - xy' = 0$.

V enačbi ne nastopa y, zato za novo odvisno spremenljivko vzamemo $u = y'$ in dobimo enačbo

$$(1-x^2)u' - xu = 0.$$

To je homogena linearna DE 1. reda, ki jo rešimo z ločitvijo spremenljivk.

$$\begin{aligned} (1-x^2)\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= xu \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2} \\ \ln u &= -\tfrac{1}{2}\ln|1-x^2| + \ln C \\ u &= \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Desni integral izračunamo z uvedbo nove spremenljivke ($t = 1-x^2$, $\mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x$)

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x^2} = -\tfrac{1}{2}\int \tfrac{\mathrm{d}t}{t} = -\tfrac{1}{2}\ln t = -\tfrac{1}{2}\ln|1-x^2|.$$

Rešitev za u še enkrat integriramo, da dobimo rešitev za y

$$y(x) = \int u\,\mathrm{d}x = \int \frac{C\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = C\arcsin x + D.$$

21. (♣) Rešite enačbo $\cos x y''' + \sin x y'' = \sin x$.

V enačbi ne nastopata y in y', zato za novo odvisno spremenljivko vzamemo $u = y''$ in dobimo enačbo

$$\cos x u' + \sin x u = \sin x.$$

To je nehomogena linearna DE 1. reda, ki jo rešimo z ločitvijo spremenljivk in variacijo konstante. Pri reševanju homogenega dela upoštevamo, da je $\int \mathrm{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x)$.

$$\begin{aligned} \cos x u' + \sin x u &= 0 \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -\int \mathrm{tg}x\,\mathrm{d}x \\ \ln u &= \ln(\cos x) + \ln C \\ u_H &= C\cos x \end{aligned}$$

Odvajamo

$$u(x) = C(x)\cos x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = C'(x)\cos x - C(x)\sin x.$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$C'(x)\cos^2 x - C(x)\sin x\cos x + C(x)\cos x\sin x = \sin x.$$

Sledi

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \\ C(x) &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x} \qquad (t = \cos x,\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je $u_P = 1$, splošna rešitev pa

$$u(x) = 1 + C\cos x.$$

Rešitev za u še dvakrat integriramo, da dobimo rešitev za y

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int (1 + C\cos x)\,\mathrm{d}x = x + C\sin x + D, \\ y(x) &= \int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int (x + C\sin x + D)\,\mathrm{d}x = \tfrac{x^2}{2} - C\cos x + Dx + E. \end{aligned}$$

22. Rešite enačbo $yy'' = (y')^2 - y'$.

V enačbi x ne nastopa eksplicitno, zato za novo neodvisno spremenljivko vzamemo y, za novo odvisno spremenljivko pa $u = y'$. Sledi $y'' = u\dot{u}$. Diferencialno enačbo prvega reda, ki jo dobimo po substituciji, rešimo z ločitvijo spremenljivk.

$$\begin{aligned} yu\dot{u} &= u^2 - u \\ \int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} &= \int \frac{\mathrm{d}y}{y} \\ \ln(u-1) &= \ln y + \ln C \\ u &= Cy + 1 \end{aligned}$$

Za obratno substitucijo $u = y'$ rešimo še eno diferencialno enačbo z ločitvijo spremenljivk.

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= Cy + 1 \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{Cy+1} &= \int \mathrm{d}x \\ \tfrac{1}{C}\ln(Cy+1) &= x + \tfrac{\ln D}{C} \\ Cy + 1 &= D\mathrm{e}^{Cx} \\ y(x) &= \tfrac{D\mathrm{e}^{Cx} - 1}{C} \end{aligned}$$

23. (♣) Rešite enačbo $yy'' - 1 + (y')^2 = 0$.

V enačbi x ne nastopa, zato za novo neodvisno spremenljivko vzamemo y, za novo odvisno spremenljivko pa $u = y'$. Sledi $y'' = u\dot{u}$. Diferencialno enačbo prvega reda, ki jo dobimo po substituciji, rešimo z ločitvijo spremenljivk.

$$\begin{aligned} yu\dot{u} &= 1 - u^2 \\ \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^2} &= \int \frac{\mathrm{d}y}{y} \\ -\tfrac{1}{2}\ln(1-u^2) &= \ln y + \ln C \\ (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} &= Cy \\ u &= \sqrt{1 - \tfrac{1}{C^2y^2}} \end{aligned}$$

Tu smo upoštevali, da je

$$\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = -\tfrac{1}{2}\ln(1-u^2).$$

Za obratno substitucijo $u = y'$ rešimo še eno diferencialno enačbo z ločitvijo spremenljivk.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - \tfrac{1}{C^2y^2}} &= \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
\int \tfrac{Cy\,\mathrm{d}y}{\sqrt{C^2y^2-1}} &= \int \mathrm{d}x \\
\tfrac{\sqrt{C^2y^2-1}}{C} &= x + \tfrac{D}{C} \\
C^2y^2 - 1 &= (Cx+D)^2 \\
y(x) &= \tfrac{1}{C}\sqrt{(Cx+D)^2+1}
\end{aligned}$$

24. Rešite sistem diferencialnih enačb $\dot{x} = 2x - y$, $\dot{y} = -x + 2y$, kjer je $x = x(t)$, $y = y(t)$, skupaj z začetnima pogojema $x(0) = 1$, $y(0) = -3$.

Sistem rešimo z nastavkoma $x = Ae^{\lambda t}$ in $y = Be^{\lambda t}$. Odvajamo in dobimo $\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t}$ in $\dot{y} = \lambda Be^{\lambda t}$. To vstavimo v enačbi ter po deljenju z $e^{\lambda t}$ in ureditvi enačb dobimo homogen sistem

$$\begin{aligned}
(\lambda-2)A + B &= 0, \\
A + (\lambda-2)B &= 0.
\end{aligned}$$

Ta sistem ima netrivialno rešitev, ko je determinanta matrike koeficientov enaka 0. Ker je

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0,$$

dobimo dve rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 3$. Za vsako poiščemo rešitev.

- Za $\lambda_1 = 1$ dobimo iz enačbe $B = A$ in zato $x_1 = A_1e^t$ in $y_1 = A_1e^t$.
- Za $\lambda_2 = 3$ dobimo iz enačbe $B = -A$ in zato $x_2 = A_2e^{3t}$ in $y_2 = -A_2e^{3t}$.

Rešitev sistema diferencialnih enačb ($x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$) je

$$\begin{aligned}
x(t) &= A_1e^t + A_2e^{3t}, \\
y(t) &= A_1e^t - A_2e^{3t}.
\end{aligned}$$

Vstavimo še začetna pogoja in dobimo sistem $x(0) = A_1 + A_2 = 1$ in $y(0) = A_1 - A_2 = -3$, ki ima rešitev $A_1 = -1$ in $A_2 = 2$. Torej

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{3t}, \\
y(t) &= -\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{3t}.
\end{aligned}$$

25. (♣) Rešite sistem diferencialnih enačb $\dot{x} = -3x - y$, $\dot{y} = x - y$.

Sistem rešimo z nastavkoma $x = Ae^{\lambda t}$ in $y = Be^{\lambda t}$. Odvajamo in dobimo $\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t}$ in $\dot{y} = \lambda Be^{\lambda t}$. To vstavimo v enačbi ter po deljenju z $e^{\lambda t}$ in ureditvi enačb dobimo homogen sistem

$$\begin{aligned}
(\lambda+3)A + B &= 0, \\
-A + (\lambda+1)B &= 0.
\end{aligned}$$

Ta sistem ima netrivialno rešitev, ko je determinanta matrike koeficientov enaka 0. Ker je

$$\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0,$$

dobimo dvojno rešitev $\lambda_{1,2} = -2$, zato popravimo nastavke v

$$\begin{aligned}
x(t) &= (At+B)\mathrm{e}^{-2t}, \\
y(t) &= (Ct+D)\mathrm{e}^{-2t}.
\end{aligned}$$

Odvajamo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\mathrm{e}^{-2t} - 2(At+B)\mathrm{e}^{-2t},\\ \dot{y}(t) &= C\mathrm{e}^{-2t} - 2(Ct+D)\mathrm{e}^{-2t}.\end{aligned}$$

Nastavke in odvode vstavimo v sistem enačb, uredimo in delimo z e^{-2t}. Dobimo enačbi $(A+C)t+A+B+D=0$ in $(A+C)t+B-C+D=0$, od koder sledi $C=-A$, $D=-A-B$. Rešitev sistema diferencialnih enačb je

$$\begin{aligned}x(t) &= (At+B)\mathrm{e}^{-2t},\\ y(t) &= (-At-A-B)\mathrm{e}^{-2t}.\end{aligned}$$

26. Rešite sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= y, \quad x(0)=3, \quad y(0)=0,\\ \ddot{y} &= y, \quad \dot{x}(0)=-1, \quad \dot{y}(0)=1.\end{aligned}$$

Najprej rešimo diferencialno enačbo $\ddot{y}-y=0$, ki je homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Karakteristični polinom $\lambda^2-1=0$ ima ničli $\lambda_{1,2}=\pm 1$, zato je rešitev enačbe

$$y = A\mathrm{e}^{t} + B\mathrm{e}^{-t}.$$

Odvajamo

$$\dot{y} = A\mathrm{e}^{t} - B\mathrm{e}^{-t},$$

vstavimo začetne pogoje in dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}y(0) = A+B &= 0,\\ \dot{y}(0) = A-B &= 1,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A=\frac{1}{2}$ in $B=-\frac{1}{2}$. Sledi

$$y(t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}.$$

Sedaj rešimo še diferencialno enačbo $\ddot{x}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$ tako, da dvakrat integriramo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \int \left(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + C,\\ x &= \int \left(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + C\right)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + Ct + D.\end{aligned}$$

Vstavimo začetne pogoje in dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}x(0) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + D &= 3,\\ \dot{x}(0) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + C &= -1,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $C=-2$ in $D=3$. Sledi

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} - 2t + 3.$$