Izbrana poglavja iz matematike

Vektorski prostor

Realni vektorski prostor $\mathcal{V}$ nad obsegom števil $\mathbb{R}$ je množica z dvema operacijama: seštevanjem in množenjem s skalarjem (številom).

- Seštevanje je preslikava iz $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, ki paru elementov iz $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ priredi točno določen element iz $\mathcal{V}$, in sicer $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$.
- Množenje s skalarjem je preslikava iz $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, ki paru, sestavljenem iz elementa iz $\mathbb{R}$ in elementa iz $\mathcal{V}$, priredi točno določen element iz $\mathcal{V}$, in sicer $(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$.

Za ti dve operaciji mora veljati:

- $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ (asociativnost)
- $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$, $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ (komutativnost)
- obstaja tak element $0 \in \mathcal{V}$, da je $v + 0 = v$ za vsak $v \in \mathcal{V}$ (nevtralni element za seštevanje)
- za vsak $v \in \mathcal{V}$ obstaja tak element $(-v) \in \mathcal{V}$, da je $v + (-v) = 0$ (nasprotni ali inverzni element za seštevanje)

- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{V}$ (asociativnost)
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v \in \mathcal{V}$ (distributivnost)
- $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ (distributivnost)
- $1 \cdot v = v$ za vsak $v \in \mathcal{V}$ (nevtralni element za množenje)

Definicija

Naj bodo $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$ in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Potem izraz

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

imenujemo linearna kombinacija elementov $v_1, \ldots, v_n$.

Opomba

Podobno, kot smo definirali realni vektorski prostor, bi lahko definirali tudi vektorski prostor nad obsegom kompleksnih števil. V tem primeru bi povsod v definiciji nadomestili realna števila iz $\mathbb{R}$ s kompleksnimi števili iz $\mathbb{C}$.

Primer

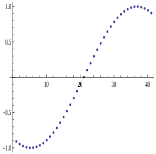
Naj bo $\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}\}$ množica vseh neomejenih zaporedij.

Seštevanje in množenje s skalarjem je definirano po komponentah:

$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$

$\alpha(x_1, x_2, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots)$

Na primer, če merimo signal v diskretnih časih.



Primer

Naj bo $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ množica vseh n-dimenzionalnih vektorjev.
Seštevanje in množenje s skalarjem je definirano po komponentah:
$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$
Na primer, naj bo $n = 3$ in $\mathcal{V}$ vektorski prostor vseh vektorjev v prostoru, pri čemer identificiramo točko v prostoru (x_1, x_2, x_3) s krajevnim vektorjem do te točke.
Na primer, naj bo $n = 24$ in $\mathcal{V}$ vektorski prostor dnevnih temperatur po posameznih urah dneva, komponente vektorja so temperature ob posamezni uri dneva.

Primer

Naj bo $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{mn} = M_{mn}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$.

Seštevanje in množenje s skalarjem je definirano po komponentah:

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$
- $$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Primer

Naj bo $\mathcal{V} = \{p : p \quad \text{polinom stopnje največ } n\}$ množica vseh realnih polinomov

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

stopnje n ali manj.

Seštevanje in množenje polinomov je definirano po točkah:

- če sta $p, q \in \mathcal{V}$, potem je $p + q \in \mathcal{V}$ tak polinom, da velja $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$, $x \in \mathbb{R}$
  Vsota dveh polinomov stopnje največ n je zopet polinom stopnje največ n.
- če je $p \in \mathcal{V}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$, potem je $\alpha p \in \mathcal{V}$ tak polinom, da velja $(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$

Primer

Naj bo $\mathcal{V} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ množica vseh realnih funkcij, ki slikajo iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$.

Seštevanje in množenje funkcij je definirano po točkah:

- če sta $f, g \in \mathcal{V}$, potem je $f + g \in \mathcal{V}$ taka funkcija, da velja $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in \mathbb{R}$
- če je $f \in \mathcal{V}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$, potem je $\alpha f \in \mathcal{V}$ taka funkcija, da velja $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Primer

Množica rešitev homogene linearne diferencialne enačbe.
To je vektorski podprostor prostora $\mathcal{V} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, to je množice vseh realnih funkcij, ki slikajo iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$.

Primer

Naj bo dana homogena linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti

$$y(x)'' - y(x) = 0.$$

Potem je za katerikoli dve rešitve te diferencialne enačbe, na primer,

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}$$

rešitev diferencialne enačbe tudi funkcija

- $\alpha y_1(x)$
- $y_1(x) + y_2(x)$

Definicija

Vektorji $v_1, \ldots, v_n$ iz vektorskega prostora $\mathcal{V}$ so linearno neodvisni, če je za $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

natanko tedaj, ko je $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.
Vektorji $v_1, \ldots, v_n$ so linearno odvisni, če niso linearno neodvisni.

Denimo, da so vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$ linearno odvisni. Torej obstajajo taka števila $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, da je

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

in da je vsaj eno izmed števil $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ različno od nič. Brez škode za splošnost privzamemo, da je to število α_1.
Potem lahko v_1 izrazimo z ostalimi:

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) v_n.$$

Torej so elementi $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{V}$ linearno odvisni natanko tedaj, ko lahko vsaj enega izmed njih izrazimo z ostalimi, kar pomeni, da ga lahko zapišemo kot linearno kombinacijo ostalih.

Primer

Polinomi $p_1(x) = x^2 - 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$, $p_3(x) = x$ in $p_4(x) = 2x + 3$ so linearno odvisni.
Na primer, polinom p_1 lahko izrazimo kot linearno kombinacijo ostalih:

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{3}p_3 - \frac{2}{3}p_4.$$

Ali lahko vsak polinom stopnje največ dva izrazimo s polinomi p_2, p_3 in p_4? Da.

Definicija

Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor. Potem je množica $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$ baza prostora $\mathcal{V}$, če velja:

- vsi elementi množice $\mathcal{B}$ so linearno neodvisni
- vsak element iz vektorskega prostora $\mathcal{V}$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo elementov iz baze $\mathcal{B}$.

Torej za vsak $v \in \mathcal{V}$ obstajajo taki linearno neodvisni $e_1, \ldots, e_k \in \mathcal{B}$ in taki $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, da je

$$v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k.$$

Opomba

Baza je največja podmnožica linearno neodvisnih vektorjev.
Ni enolično določena.

Primer

Naj bo $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\}$.
Potem sta obe množici

- $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
- $\mathcal{B}_2 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$

bazi prostora $\mathcal{V}$.

Primer

Naj bo $\mathcal{V} = M_{mn}(\mathbb{R})$. Definiramo matriko E_{ij}. To je matrika, ki ima na (i,j)-tem mestu 1, drugod pa same ničle.
Na primer

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Potem je $\mathcal{B} = \{E_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ standardna baza prostora $M_{mn}(\mathbb{R})$.

Primer

Naj bo $\mathcal{V}$ prostor polinomov stopnje manjše ali enake n. Potem je

$$\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^n\}$$

baza prostora $\mathcal{V}$.

Primer

Naj bo $\mathcal{V}$ prostor vseh polinomov.
Potem je

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots\} = \{x^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

baza prostora $\mathcal{V}$.

Primer

Naj bo $\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_i \in \mathbb{R}\}$ množica vseh neomejenih zaporedij, ki imajo samo končno členov različnih od nič.
Označimo z e_i zaporedje, ki ima na i-tem mestu 1, drugod pa same 0.
Na primer $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$.
Potem je

$$\mathcal{B} = \{e_i, i \in \mathbb{N}\}$$

baza prostora $\mathcal{V}$.

Primer

Naj bo $\mathcal{V}$ prostor vseh rešitev homogene LDE $y''(x) - y(x) = 0$. Potem je

$$\mathcal{B} = \{e^x, e^{-x}\}$$

baza prostora $\mathcal{V}$.

Naj bo $\mathcal{V}$ množica vseh zveznih funkcij.
Kaj bi bila baza?
Koliko elementov bi morala imeti ta množica?

Definicija

Dimenzija vektorskega prostora je enaka moči baze, to pomeni, da je enaka številu elementov v bazi, če je elementov končno, oziroma moč baze je neskončna, če je v bazi neskončno elementov.

Kaj če imamo za isti vektorski prostor dve različni bazi?

Trditev

Vse baze vektorskega prostora imajo isto moč.


CENTRAL PARK
UPPER EAST SIDE
WEST SIDE
Henry Hudson Pkwy
Amsterdam
W. 81
W. 79th
Am. Mus. of Nat. Hist.
W. 77th
W. 72nd
West End Ave.
Central Park West
The Lake
The Mall
Sheep Meadow
Broadway
W. 65
Lincoln Center
W. 61
Fordham Univ.
W. 60th
59th
Columbus Circle
Central Park South
The Pond
ZOO
57th St.
Visitor's Center
Carnegie Hall
W. 54th
W. 53rd
De Witt Clinton Park
W. 50th
48th
W. 42nd St.
Times Sq.
Port Authority Terminal
12th Ave.
Eleventh Ave.
Tenth Ave.
Ninth Ave.
Eighth Ave.
Seventh Ave.
Ave. of the Americas
Sixth Ave.
Fifth Ave.
Mus. of Modern Art
Radio City Music Hall
Rockefeller Center
St. Patrick's Cathedral
Grand Central Station
Bryant Park
N.Y. Library
Metro Museum of Art
Central Park East
Fifth Ave.
Park Ave.
Whitney Art Museum
Frick Coll.
Lexington Ave.
Third Ave.
Second
First
York
Kettering
So. N.Y. Hospital
E. 84th
E. 79th St.
E. 78th
E. 76th
E. 75th
E. 72nd St.
E. 66th St.
E. 65th
E. 61st St.
E. 60th
E. 59th
E. 57th
E. 54th St.
E. 50th
E. 48th
E. 46
E. 42nd
Sutton
U. N. Head-quarters
FDR Drive
Roosevelt Island
Queens-boro Bridge
EAST RIVER
Queens
Midtown Tunnel
495
Lincoln

Vidimo, da nas lahko zanimajo različne razdalje med dvema točkama.
Lahko pa nas zanimajo tudi razdalje med različnimi objekti, ne zgolj točkami.
Na primer, pomembne so razdalje med funkcijami, matrikami, zaporedji, ...

Metrični prostor

Definicija

Metrični prostor je par (X, d), pri čemer je X množica in $d : X \times X \to [0, \infty)$ preslikava, za katero velja:

- $d(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko je $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$, simetričnost
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, trikotniška neenakost

Preslikavo d imenujemo metrika oziroma razdalja prostora X.

Definicija

Naj bo x_0 element metričnega prostora (X, d). Potem je:

$$B(x_0, r) = \{x : d(x_0, x) < r\}$$

odprta krogla s središčem x_0 in s polmerom r,

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x : d(x_0, x) \leq r\}$$

zaprta krogla s središčem x_0 in s polmerom r,

$$S(x_0, r) = \{x : d(x_0, x) = r\}$$

sfera s središčem x_0 in s polmerom r.

Opomba

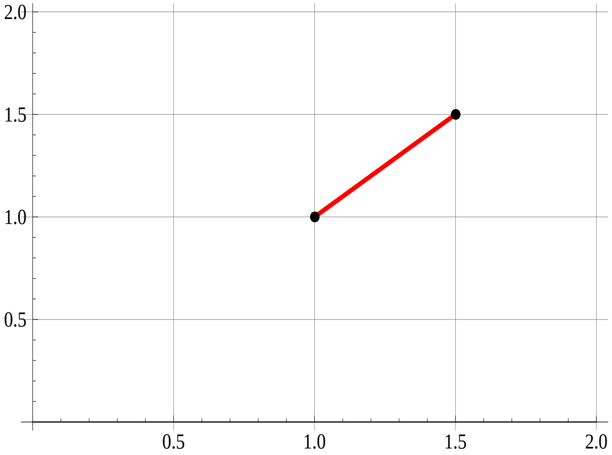
Naj bo (X, d) metrični prostor. Na množici X v splošnem nimamo definirane nobene dodatne strukture (npr. operacije seštevanja).

Primer

$X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |y - x|$.
Spomnimo se, da je $\sqrt{(y - x)^2} = |y - x|$.
Enotska krogla okrog točke 0 je odprti interval $(-1, 1)$.

Primer

$X = \mathbb{R}^2$, $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.



Enotska krogla okrog točke $(0, 0)$ je krog s polmerom 1 brez roba.

Primer

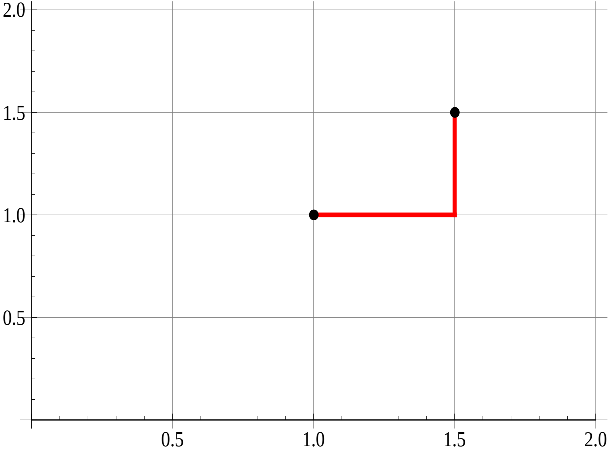
Podobno za $X = \mathbb{R}^n$,

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \\ = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Primer

$X = \mathbb{R}^2$

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$



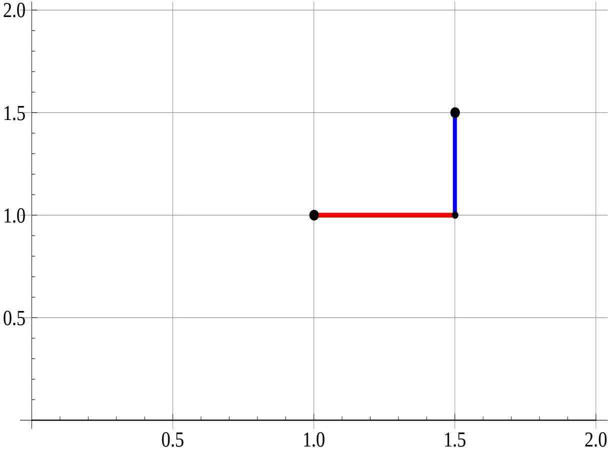
Enotska krogla okrog točke $(0,0)$ je množica

$$\{(x_2, y_2) : |x_2| + |y_2| < 1\}.$$

Primer

$X = \mathbb{R}^2$,

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$.



Enotska krogla okrog točke $(0,0)$ je množica

$$\{(x_2, y_2) : \max\{|x_2|, |y_2|\} < 1\}.$$

Primer

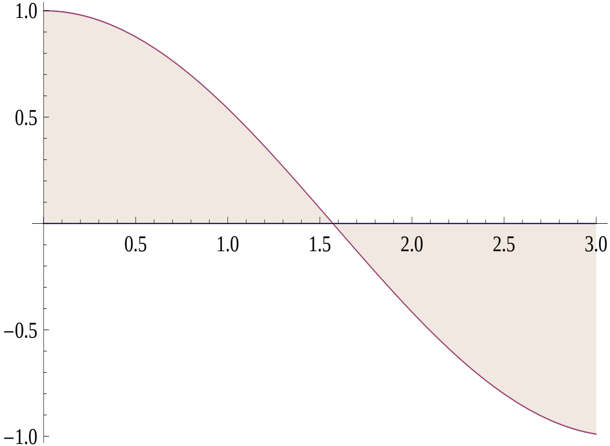
X poljubna množica,
$d(x, y) = 0$, če $x = y$, in $d(x, y) = 1$, če $x \neq y$.
Diskretna metrika.

Enotska krogla okrog elementa x je samo x.

Primer

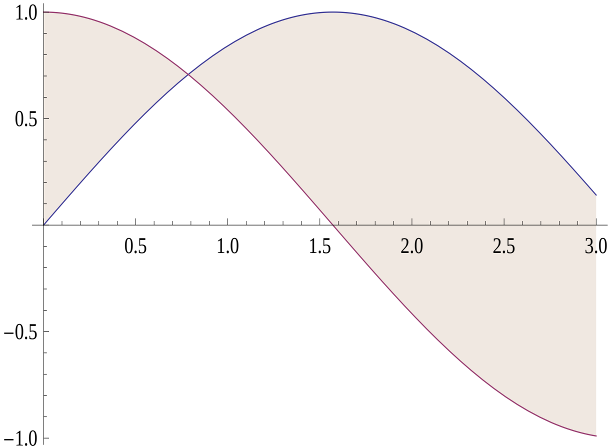
Naj bo $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ vektorski prostor vseh zveznih funkcij, ki slikajo z intervala $[a,b]$ v realna števila. Metriko definiramo s predpisom

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



$f(x) = 0, \;\; g(x) = \cos x, \;\; [0, 3]$

$d(f, g) = \int_0^3 |g(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^3 \cos x dx = 1.86.$



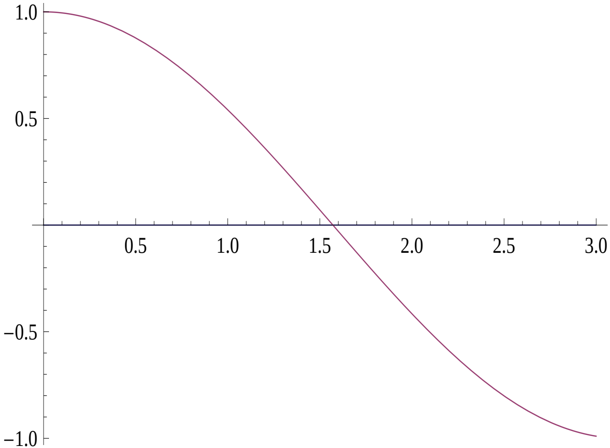
$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad [0,3]$$

$$d(f,g) = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{3} (\sin x - \cos x) dx = 2.68.$$

Primer

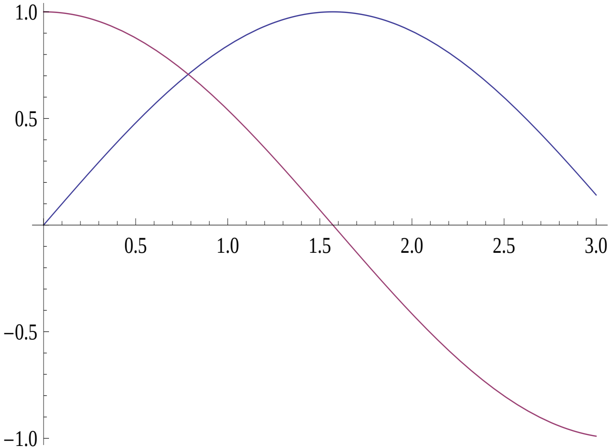
Naj bo $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ vektorski prostor vseh zveznih funkcij, ki slikajo z intervala $[a,b]$ v realna števila. Metriko definiramo s predpisom

$$d(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$



$f(x) = 0, \;\; g(x) = \cos x, \;\; [0,3]$

$d(f,g) = \max_{x\in[0,3]} |g(x)| = 1.$



$f(x) = \sin x, \;\; g(x) = \cos x, \;\; [0, 3]$

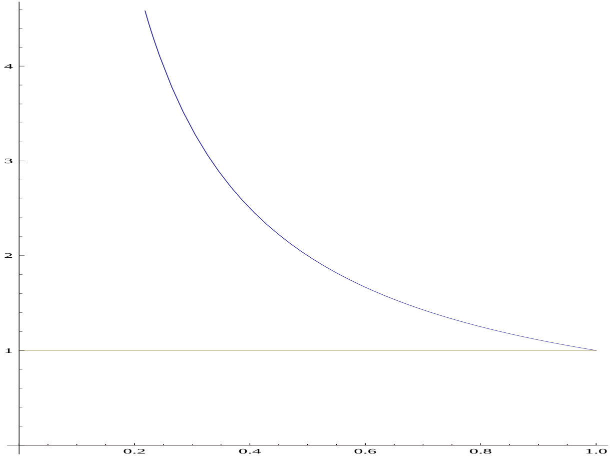
$d(f, g) = \max_{x \in [0,3]} |f(x) - g(x)| = \sqrt{2} = 1.41.$

Primer

Poiščimo primer intervala in dveh parov funkcij, ki sta v eni metriki blizu skupaj, v drugi pa daleč narazen.
Obe funkciji nič, razen v majhni okolici ene točke ena izmed funkcij zelo velika.
Obe funkciji konstantni, ena nič, ena ε, le da interval zelo dolg.

Opomba

Če bi imeli prostor zveznih funkcij $\mathcal{C}((a,b),\mathbb{R})$ ali $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, s predpisom $d(f,g) = \max_{x\in(a,b)} |f(x) - g(x)|$ ne bi bila definirana metrika, saj maksimum ne obstaja nujno. Torej bi bila razdalja med dvema funkcijama lahko neomejena.



$$f(x) = \frac{1}{x}, \;\; g(x) = 1, \;\; (0, 1).$$

Lahko pa vseeno imamo funkcije, ki so definirane na $\mathbb{R}$, in nam predpis $d(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$ definira metriko.
Pogoj je le, da so funkcije na $\mathbb{R}$ omejene.

Konvergenca zaporedij

Definicija

Zaporedje $\{x_n\}$ v metričnem prostoru (X, d) je konvergentno, če obstaja tak $x \in X$, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(x_n, x) < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$.
Tak x potem imenujemo limita zaporedja in pišemo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Definicija (Cauchyev pogoj)

Zaporedje $\{x_n\}$ zadošča Cauchyevemu pogoju, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$ in vsak $p \in \mathbb{N}$.

Definicija

Če za vsako zaporedje, ki zadošča Cauchyevemu pogoju, obstaja limita tega zaporedja, potem pravimo, da je prostor poln.

Primer

Prostor $\mathbb{Q}$ z metriko $d(x,y) = |x - y|$ ni poln.
Prostor $\mathbb{R}$ je poln. (Prostor $\mathbb{R}$ je napolnitev prostora $\mathbb{Q}$, torej $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.)
Prostori $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, z običajno metriko so polni.
Prostor $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ z metriko $d(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ je poln.
Prostor $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ z metriko $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ ni poln.

Primer

Zaporedje funkcij $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$ je dano s predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & : \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ 1 - nx & : 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Preverimo, če zaporedje zadošča Cauchyevemu pogoju in poiščimo limitno funkcijo.

Izrek o negibni točki (Fixed point theorem)

Definicija

Točka x_0 je negibna točka preslikave f, če velja $f(x_0) = x_0$.

Definicija

Naj bo (X, d) metrični prostor.
Preslikava f je izometrija, če velja

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Preslikava f je skrčitev, če velja

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \;\; 0 \leq \alpha < 1.$$

Izrek (Banachov izrek o negibni točki)

Naj bo X poln metrični prostor in $T\colon X \to X$ skrčitev. Potem obstaja natanko ena negibna točka preslikave T.

Dokaz

Naj bo x_0 poljubna točka. Definiramo zaporedje $x_1 = T(x_0)$, $x_2 = T(x_1) = T(T(x_0)) = T^2(x_0)$, $x_3 = T(x_2) = T^3(x_0)$, ...
Najprej pokažemo, da je to zaporedje Cauchyevo.
Ker je prostor poln, ima zaporedje limito, ki jo označimo z x^*.
Pokažemo, da je x^* negibna točka preslikave T.
Pokazati moramo še, da je x^* edina negibna točka preslikave T.

Primer

- Kompresija slik
- Ekonomski modeli
- Spletni iskalnik
- Reševanje diferencialnih enačb

Pri reševanju diferencialnih enačb večkrat prevedemo problem na iskanje rešitve integralske enačbe:

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) \mathrm{d}y + g(x),$$

kjer je λ konstanta, K funkcija dveh spremenljivk, ki jo imenujemo jedro integralskega operatorja, g funkcija ene spremenljivke in f iskana funkcija.
Definiramo preslikavo

$$T(h)(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) h(y) \mathrm{d}y + g(x).$$

Rešitev prejšnje enačbe je natanko negibna točka preslikave T.
Če je T skrčitev, potem ima T negibno točko.

Normiran prostor

Pri metričnih prostorih povemo samo, koliko je razdalja med dvema elementoma, ne povemo pa, kako velik je posamezen element.
V normiranih prostorih vsakemu elementu priredimo neko vrednost.
Norma je posplošitev absolutne vrednosti.

Definicija

Naj bo X realen vektorski prostor. Norma $\| \, . \, \|$ je preslikava iz prostora X v $[0, \infty)$, za katero veljajo naslednje lastnosti:

- $\|x\| \geq 0$ za vsak $x \in X$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x \in X$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$ (trikotniška neenakost)

Definicija

Vektorski prostor z normo imenujemo normiran prostor.

Trditev

Vsak normiran prostor z normo $\| \, . \, \|$ *je tudi metrični prostor z metriko*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Opomba

Ni pa vsak metrični prostor tudi normiran prostor.

Opomba

Za metriko porojeno (inducirano) z normo velja

$$d(x+z, y+z) = d(x, y)$$

Translacijsko invariantna metrika

Definicija

Poln normiran prostor imenujemo Banachov prostor.

Primer

Vektorska p-norma za n-dimenzionalni vektorski prostor

- $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$, 1-norma
- $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 2-norma ali Evklidska norma
- $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, p-norma
- $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$, maksimum norma

Primer

Prostori integrabilnih funkcij na intervalu $[a, b]$ s p-normo:

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pozor, to ni norma!

Definiramo ekvivalenčne razrede - identificiramo funkcije, ki se razlikujejo samo na množici z "mero" 0.

Linearni operatorji

Definicija

Naj bo X linearni prostor in $T\colon X \to X$. Preslikava T je linearni operator, če velja

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

za vsak $x, y \in X$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Primer

Naj bo $C_\infty(\mathbb{R})$ prostor vseh neskončnokrat odvedljivih realnih funkcij.

Potem je odvajanje T, torej $T(f)(x) = f'(x)$, linearni operator na prostoru $C_\infty(\mathbb{R})$.

$T(f+g)(x) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = T(f)(x) + T(g)(x)$.

$T(\alpha f)(x) = (\alpha f)'(x) = \alpha f(x)$

Primer

Naj bo X prostor vseh integrabilnih realnih funkcij.
Potem je integriranje T, torej $T(f)(x) = \int f(x)dx$, linearni operator na prostoru X.
$T(f+g)(x) = \int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx =$
$T(f)(x) + T(g)(x)$
$T(\alpha f)(x) = \int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx = \alpha T(f)(x)$

Izrek

Naj bo X n-dimenzionalen prostor in Y m-dimenzionalen prostor. Potem lahko vsako linearno preslikavo $T\colon X \to Y$ zapišemo v matrični obliki $T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. *Linearna preslikava T preslika vsak element $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ v prostor Y kot matrično množenje* $T(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Naj bo $T\colon X \to Y$ linearni prostor. Zaloga vrednosti linearnega operatorja T, ki jo označimo $\mathrm{Im}\, T$, je linearni prostor. Jedro linearnega operatorja T, ki jo označimo $\mathrm{Ker}\, T$, torej množica vseh tistih $x \in X$, ki jih T preslika v nič, je prav tako linearni prostor.

Definicija

Naj bosta X in Y normirana prostora in $T\colon X \to Y$ linearna preslikava. Linearna preslikava T je omejena, če obstaja neka konstanta $C > 0$, tako da je

$$\|Tx\| \leq C\|x\|$$

za vsak $x \in X$.

Opomba

Omejena linearna preslikava slika omejene množice v omejene množice.

Če je $C > 0$ taka konstanta, da je $\|Tx\| \leq C\|x\|$ za vsak $x \in X$, potem tudi za vsako konstanto $K > C$ velja omenjena neenakost.
Zanima nas najmanjša konstanta, za katero velja neenakost.
To konstanto bomo označili s $\|T\|$ in pokazali, da je to norma na prostoru omejenih linearnih operatorjev.

Definicija

Naj bo $B(X, Y)$ prostor vseh omejenih linearnih operatorjev, ki slikajo iz prostora X v prostor Y.
Potem je s predpisom

$$\|T\| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\in X, \|x\|=1} \|Tx\|$$

definirana norma na prostoru omejenih linearnih operatorjev.

Prepričajmo se, da je to res norma.

- $\|Tx\| \geq 0$, $\|x\| > 0$, torej je $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq 0$ za vsak $x \in X$, zato je tudi $\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq 0$.
- Če je $\|T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0$, potem je $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0$ za vsak $x \in X$, torej $\|Tx\| = 0$ za vsak $x \in X$,zato $Tx = 0$ za vsak $x \in X$, kar pomeni, da je T ničelni operator.
- $\|\alpha T\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|\alpha Tx\|}{\|x\|} = |\alpha| \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = |\alpha| \|T\|$.

- $\|T + S\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|(T+S)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|+\|Sx\|}{\|x\|}$
$\leq \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} + \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \|T\| + \|S\|$

Opomba

Norma linearnega operatorja $\|T\|$ je torej najmanjše realno število, za katero velja

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$$

za vsak $x \in X$.

Trditev

Naj bosta T in S linearna operatorja. Potem je

$$\|TS\| \leq \|T\|\|S\|.$$

Dokaz

$\|TSx\| \leq \|T\|\|Sx\| \leq \|T\|\|S\|\|x\|.$

Primer

$\|I\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Ix\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|x\| = 1.$

Primer

Operator odvajanja ni omejen operator na prostoru vseh polinomov na intervalu $[0, 1]$ z maksimum normo.
Na primer, $\|T(x^n)\| = \|nx^{n-1}\| = n\|x^{n-1}\| = n.$

Izrek

Naj bo $T: X \to X$ linearen operator. Potem velja:

- *T je omejen natanko tedaj, ko je zvezen*
- *če je T zvezen v eni točki, potem je zvezen povsod.*

Definicija

Zožitev operatorja $T\colon X \to Y$ na podprostor $Z \subseteq X$ je operator $T|_Z\colon Z \to Y$, definiran s predpisom

$$T|_Z(x) = T(x)$$

za vsak $x \in Z \subseteq X$.

Definicija

Vložitev operatorja $T\colon X \to Y$ v prostor $W \supseteq X$ je operator $\tilde{T}\colon W \to Y$, za katerega velja, da je

$$\tilde{T}|_X(x) = T(x)$$

za vsak $x \in X \subseteq W$.

Definicija

Linearni operator $f\colon X \to \mathbb{R}$ imenujemo linearni funkcional.

Linearni funkcional je poseben primer linearnega operatorja $T\colon X \to Y$, pri katerem je prostor $Y = \mathbb{R}$. (Lahko je tudi $Y = \mathbb{C}$).

Primer

Naj bo $C([a,b])$ prostor zveznih funkcij na intervalu $[a,b]$ z maksimum normo. Potem je $F\colon C([a,b]) \to \mathbb{R}$, definiran s predpisom

$$F(f) = \int_a^b f(x)dx$$

linearni funkcional.

Pokažimo, da je njegova norma $\|F\| = b - a$.

Hilbertov prostor

Naj bo X vektorski prostor. Na prostoru $X \times X$ definiramo bilinearno preslikavo $\langle .\,,. \rangle$, ki slika v $\mathbb{R}$ (ali $\mathbb{C}$) in za katero velja:

- $\langle x, x \rangle \geq 0, \;\; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

za $x, y, z \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (ali $\mathbb{C}$).
Preslikavo $\langle ., . \rangle$ potem imenujemo skalarni produkt prostora X.

Definicija

Elementa $x, y \in X$ sta pravokotna, če je njun skalarni produkt enak nič, torej če velja $\langle x, y \rangle = 0$.

Trditev

Skalarni produkt $\langle .,. \rangle$ *na prostoru* X *porodi normo, definirano s predpisom*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Opomba

Ker skalarani produkt porodi normo, porodi tudi metriko na prostoru X in sicer s predpisom
$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$.

Pri dokazovanju, da je $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ res norma, uporabimo naslednji izrek.

Izrek (Neenakost Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky)

Naj bo $\langle ., . \rangle$ skalarni produkt na prostoru X in $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Potem za poljubna $x, y \in X$ velja

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|.$$

Za normo porojeno s skalarnim produktom velja paralelogramsko pravilo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Primer

Prostor zveznih funkcij z maksimum normo ni porojen s skalarnim produktom.

Definicija

Če je prostor poln v normi, definirani s skalarnim produktom, ga imenujemo Hilbertov prostor.

Primer

Prostor $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$ sta Hilbertova prostora:

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}.$$

Primer

Prostor realnih zveznih funkcij na intervalu $[a, b]$ je Hilbertov prostor:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Primer

Prostor vseh tistih funkcij, za katere obstaja $\int_a^b |f(x)|^2 dx$, pri čemer identificiramo vse funkcije, katerih razlika je enaka nič skoraj povsod ($\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$), imenujemo prostor $L^2(a, b)$. Prostor $L^2(a, b)$ je Hilbertov prostor:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Definicija

Naj bo H Hilbertov prostor in $Y \subseteq H$. Potem je $Y^{\perp}$ množica vseh tistih $x \in H$, za katere velja $\langle x, y \rangle = 0$ za vsak $y \in Y$. Pravimo, da je $Y^{\perp}$ ortogonalni komplement množice Y.

Primer

Naj bo $f(x) = \begin{cases} -1 & : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & : \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$

Določimo ortogonalni komplement množice $\{f\} \subseteq L_2(0,1)$.

Definicija

Množica M, ki je podmnožica Hilbertovega prostora H, je ortogonalna, če so njeni elementi paroma pravokotni, torej $\langle a, b\rangle = 0$ za poljubna elementa $a, b \in M$.

Definicija

Množica M, ki je podmnožica Hilbertovega prostora H, je ortonormirana, če je ortogonalna in je norma vseh elementov enaka 1, torej $\langle a, b\rangle = 0$ za poljubna elementa $a, b \in M$ in $\|a\| = 1$ za vsak $a \in M$.

Opomba

Naj bo M ortogonalna množica. Potem za njene elemente velja Pitagorov izrek, torej $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$.

Primer

Naj bo $M_1 = \{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$, $M_2 = \{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ in $M = M_1 \cup M_2 \subseteq L_2(-\pi, \pi)$. Potem je M ortogonalna množica.

Denimo, da je $M = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ ortogonalna množica in da se da vsak element $f \in H$ zapisati kot končna ali neskončna linearna kombinacij elementov iz M:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i.$$

Če obe strani enačbe pomnožimo z e_i, potem dobimo

$$\langle f, e_i \rangle = \langle \alpha_i e_i, e_i \rangle,$$

torej

$$\alpha_i = \frac{\langle f, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}.$$

Primer

Razvoj v Fourierovo vrsto je razvoj po ortogonalnih funkcijah $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ na prosotoru $L_2(-\pi, \pi)$.

Primer

Legendrovi polinomi P_n so ortogonalni polinomi na prostoru $L_2(-1,1)$.

$$P_0(x) = 1, \;\; P_1(x) = x, \;\; P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \;\; P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \ldots$$

Primer

Hermitski polinomi H_n so ortogonalni polinomi na prostoru $L_2(-\infty, \infty)$ z utežjo e^{-x^2}, torej

$$\langle H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, H_m(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \rangle = 0, \quad n \neq m.$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \ldots$$