Uporabna statistika

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

9. oktober 2013

Diskretna slučajna spremenljivka

Slučajni poskus, različne slučajne spremenljivke.
Na primer: število pik pri metu kocke oziroma sodo ali liho število pik pri metu kocke.
Različni slučajni poskusi, podobna slučajna spremenljivka.
Na primer: spol otroka oziroma met kovanca.

Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke

Definicija

Naj bo $\{x_1, \ldots, x_n\}$ zaloga vrednosti diskretne slučajne spremenljivke X. Potem je gostota verjetnosti (verjetnostna funkcija) f spremenljivke X funkcija, ki pove, kakšna je verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednost x_i:

$$f(x_i) = p_i = P[X = x_i], \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Torej je:

- $f(x_i) \geq 0$,
- $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$.

Primer

Določite gostoto verjetnosti za naslednje funkcije:

- Število pik pri metu kocke.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

- Pri n metih kovanca n-krat pade številka.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \dots \end{pmatrix}$$

Primer

- Število poskusov, ki jih moramo narediti, da pride do reakcije. Verjetnost, da pri poskusu pride do reakcije je $\frac{1}{3}$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} & \dots \end{pmatrix}$$

Primer

S pomočjo optičnega inštrumenta so posamezni proizvodi razporejeni v ustrezne razrede. Verjetnost, da optični inštrument pravilno klasificira posamezni proizvod, je 0.98. Denimo, da smo klasificirali 3 proizvode. Naj bo X slučajna spremenljivka, ki opisuje, koliko proizvodov je bilo ustrezno klasificiranih. Določite gostoto verjetnosti za X.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.02^3 & 3 \cdot 0.02^2 \cdot 0.98 & 3 \cdot 0.02 \cdot 0.98^2 & 0.98^3 \end{pmatrix}$$

Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke

Definicija

Naj bo $\{x_1, \dots, x_n\}$ zaloga vrednosti diskretne slučajne spremenljivke X. Potem je (kumulativna) porazdelitvena funkcija F spremenljivke X funkcija, ki pove, kakšna je verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame katerokoli vrednost, ki je manjša ali enaka vrednosti x:

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} f(x_i).$$

Definicija

Torej je:

- $0 \leq F(x) \leq 1$,
- če je $x \leq y$, je $F(x) \leq F(y)$.

Primer

- $$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

  $$F(4) = \quad , F(6) = \quad , F(3.5) = \quad , F(7) =$$

- $$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \dots \end{pmatrix}$$

  $$F(n) =$$

- $$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} & \dots \end{pmatrix}$$

Matematično upanje in varianca

Matematično upanje je abstraktna idealizacija povprečja.

Definicija

Matematično upanje ali pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X, ki ga označimo z μ ali E, je definirano s predpisom

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i).$$

Primer

Pri metu kovanca dobimo 2 evra, če pade zgornja stran kovanca, če pa pade spodnja stan kovanca, dva evra plačamo.
Verjetnost, da pade zgornja stran kovanca je 0.49, verjetnost, da pade spodnja stran kovanca, pa 0.51.
Koliko je pričakovana izguba, če smo vrgli kovanec 100-krat?

Definicija

Varianca slučajne spremenljivke X, ki jo označimo z σ^2 ali V, je definirana s predpisom

$$V(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i).$$

Standardni odklon (standardna deviacija) slučajne spremenljivke X je

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}.$$

Velja

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Primer

Izračunajmo varianco iz prejšnjega primera.

Opomba

Slučajni spremenljivki imata lahko enako matematično upanje in različno varianco.

Za diskretno slučajno spremenljivko X z gostoto verjetnosti f in za funkcijo h je

$$E(h(X)) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) f(x_i).$$