

Uporabna statistika

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

22. oktober 2013

Zvezna slučajna spremenljivka

Primer

- ▶ Temperatura spojine ob koncu kemične reakcije
- ▶ Dolžina sestavnega dela
- ▶ Napetost v napeljavi
- ▶ Potreben čas, da se izvrši poskus

Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke

Definicija

Zaloga vrednosti zvezne slučajne spremenljivke X je enaka množici realnih števil \mathbb{R} . Gostota verjetnosti (verjetnostna funkcija) f zvezne slučajne spremenljivke X je funkcija, za katero velja

- ▶ $f(x) \geq 0$,
- ▶ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$,
- ▶ $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx$.

Opomba

$$P[X = a] = 0$$

Opomba

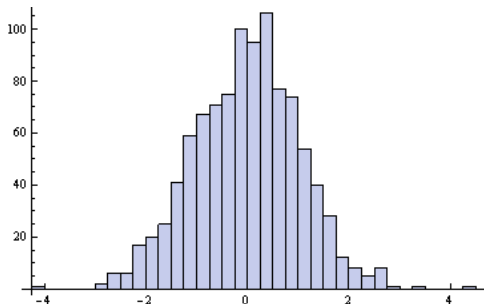
$$\begin{aligned} P[x_1 \leq X \leq x_2] &= P[x_1 < X \leq x_2] \\ &= P[x_1 \leq X < x_2] = P[x_1 < X < x_2]. \end{aligned}$$

Primer

Kolikšna je verjetnost, da bomo v vtičnici izmerili napetost 220,5V. Raje se vprašamo, kolikšna je verjetnost, da bomo v vtičnici izmerili napetost med 220,25V in 220,75V.

Opomba

Histogram je približek za gostoto verjetnosti (delež vseh meritev na danem intervalu).



Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke

Definicija

Kumulativna ali porazdelitvena funkcija F zvezne slučajne spremenljivke X je funkcija, ki pove, kakšna je verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame katerokoli vrednost, ki je manjša ali enaka vrednosti x :

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Trditev

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Matematično upanje in varianca

Definicija

Matematično upanje (pričakovana vrednost) slučajne spremenljivke X je definirano s predpisom

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Definicija

Varianca slučajne spremenljivke X je definirana s predpisom

$$V(X) = E((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

Standardni odklon (standardna deviacija) slučajne spremenljivke X je

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(X)}.$$

Trditev

Za zvezno slučajno spremenljivko X z gostoto verjetnosti f in za funkcijo h je

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx.$$

Enakomerna porazdelitev

Definicija

Zvezna slučajna spremenljivka X je enakomerno porazdeljena na intervalu $[a, b]$, če je njena gostota verjetnosti

$$f(x) = \frac{1}{b - a}.$$

Trditev

Če je X zvezna enakomerno porazdeljena slučajna spremenljivka na intervalu $[a, b]$, potem je

$$\mu = E(X) = \frac{b + a}{2}.$$

Varianca je

$$V(X) = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Primer

Slučajna spremenljivka je enaka toku (v mA), ki ga izmerimo v tanki bakreni žici. Lahko privzamemo, da je slučajna spremenljivka enakomerno porazdeljena z vrednostmi od 0 do 10 mA.

Kolikšna je verjetnost, da je izmerjeni tok manjši od 2 mA?

Koliko je matematično upanje in koliko standardna deviacija?

Normalna ali Gaussova porazdelitev

Motivacija: centralni limitni izrek (DeMoivre 1733, Gauss 19. stoletje).

Aritmetična sredina velikega števila enako porazdeljenih neodvisnih slučajnih spremenljivk je približno normalno porazdeljena slučajna spremenljivka.

Primer

Metanje n kock. Porazdelitev aritmetične sredine za $n = 1$, $n = 2$, $n = 10$.

Primer

Odstopanja od prave dolžine proizvedenega izdelka so rezultat vsot velikega števila majhnih vplivov, kot so vlažnost, temperatura, vibracije, izrabljenost stroja, sestava materiala, nečistoča, čas izdelave, itd.

Če so vsi vplivi med sabo neodvisni in lahko simetrično vplivajo na povečanje ali zmanjšanje dolžine, potem je rezultat vpliva normalno porazdeljena slučajna spremenljivka.