Uporabna statistika

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

13. november 2013

Primer.
Gama porazdelitev:

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)},$$

$$E(X) = \frac{r}{\lambda},$$

$$E(X^2) = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}.$$

Izenačimo

$$\frac{r}{\lambda} = \overline{X},$$

$$\frac{r(r+1)}{\lambda^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i^2.$$

Življenjska doba izdelka je modelirana z Gamma porazdelitvijo. Za 6 izdelkov so bile življenjske dobe $5, 12, 15, 22, 33$ in 62 dni. Koliko odstotkov izdelkov ima pričakovano življenjsko dobo krajšo od 30 dni?

Metoda največjega verjetja

Metodo je izpeljal R. A. Fischer v 20-letih prejšnjega stoletja. Naj bo X slučajna spremenljivka s slučajno porazdelitvijo $f(x, \theta)$, kjer je θ edini neznani parameter porazdelitve. Definiramo funkcijo verjetja

$$L(\theta) = \Pi_{i=1}^{n} f(x_i, \theta),$$

ki je funkcija ene spremenljivke, in poiščemo njen maksimum.

Primer. Določimo parameter λ za eksponentno porazdelitev $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ pri podatkih $1.3, 2.7, 1.9, 3.1, 2.5$.

$$L(\lambda) = \Pi_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Obe strani logaritmiramo in dobimo

$$\log L(\lambda) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Odvajamo

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

in od tod

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{X}} =$$

Interval zaupanja

Pri točkovni oceni parametrov ne vemo, kako dobra je naša ocena. Interval zaupanja za ocenjeno vrednost nekega parametra t je interval oblike $l \leq t \leq u$, kjer vrednosti l in u določimo na podlagi vzorca.
Za različne vzorce dobimo različne vrednost za l in u, zato sta l in u vrednosti nekih slučajnih spremenljivk L in U, odvisnih od vzorca $X_1, \ldots, X_n$.

$$P[L \leq t \leq U] = 1 - \alpha$$

Obstaja verjetnost $1 - \alpha$, da bomo izbrali tak vzorec, da bo interval zaupanja vseboval pravo vrednost parametra t.

Oglejmo si intervale zaupanja za normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko pri različnih pogojih.

Ocena za μ, če poznamo σ^2

$X_1, \ldots, X_n$ slučajni vzorec, X_i normalno porazdeljena slučajna spremenljivka $N(\mu, \sigma^2)$ za vsak $i = 1, \ldots, n$.
Vemo, da je porazdelitev slučajne spremenljivke $\overline{X}$ enaka $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
Potem je

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

standardizirana normalna slučajna spremenljivka.

Vemo

$$P\left[-z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha.$$

$$P\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\right] = 1-\alpha.$$

Definicija

Interval zaupanja s stopnjo zaupanja $1-\alpha$.