Uporabna statistika

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

19. november 2013

Primer

Opravimo 6 meritev, pri kateri energiji pride do preloma: 64.3, 64.7, 64.9, 65.3, 65.8 in 66.1 J. Privzemimo, da je energija preloma normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s standardno deviacijo 1 J. Poiščite interval zaupanja s stopnjo zaupanja 95 %.

Interpretacija intervala zaupanja s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$.
Denimo, da je interval zaupanja s stopnjo zaupanja 95 % enak

$$l \leq \mu \leq u.$$

To ne pomeni, da je μ v intervalu $[l, u]$ z verjetnostjo 95 %.
Interval zaupanja je slučajna spremenljivka, ki v 95 % vsebuje pravo vrednost μ, v 5 % pa ne.

Stopnja zaupanja in velikost intervala zaupanja.
Dolžina intervala:

$$\overline{x} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} - (\overline{x} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) = 2z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}.$$

Velikost vzorca
V formuli za izračun krajišč intervala zaupanja nastopa n. Če nas zanima, kako velik vzorec potrebujemo, da bo stopnja zaupanja $(1-\alpha)$ pri dani dolžini intervala $2E$, lahko n izrazimo in dobimo

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2.$$

Ocena za μ, če ne poznamo σ^2

Če je n velik in vzamemo S namesto σ, potem je

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

približno standardizirana normalna slučajna spremenljivka.
$n \geq 40$
Interval zaupanja s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$ je

$$\overline{x} - z_{\alpha/2} s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{\alpha/2} s/\sqrt{n}.$$

Če n ni velik, potem slučajna spremenljivka

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

ni porazdeljena normalno.
Slučajna spremenljivka T ima Studentovo oziroma t-porazdelitev z $n-1$ prostostnimi stopnjami (William Sealy Gosset, pivovarna Guinness).
Ko gre $n \to \infty$, je t-porazdelitev standardizirana normalna.

Porazdelitev za spremenljivko T je znana, torej

$$P\left[-t_{\alpha/2,n-1} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2,n-1}\right] = 1-\alpha.$$

Interval zaupanja s stopnjo zaupanja $1-\alpha$ je potem:

$$\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1} s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1} s/\sqrt{n}.$$

Izračunajte interval zaupanja za μ, če ne poznate σ^2 pri stopnji zaupanja 0.95 za predhodni primer: opravimo 6 meritev, pri kateri energiji pride do preloma: 64.3, 64.7, 64.9, 65.3, 65.8 in 66.1 J. (Za $\sigma = 1$ J smo dobili $[64.38, 65.98]$.)

$$\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n}, \quad t_{0.025,5} = 2.571.$$

Dobljeni interval je:

Ocena za σ^2

$X_1, \ldots, X_n$ slučajni vzorec, X_i normalno porazdeljena $N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, in naj bo

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

vzorčna varianca.
Potem je

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

slučajna spremenljivka porazdeljena po χ^2 porazdelitvi z $n-1$ prostostnimi stopnjami.

$$P\left[\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right] = 1-\alpha$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

Izračunajte interval zaupanja za σ pri stopnji zaupanja 0.95 za prejšnji primer 6 meritev: 64.3, 64.7, 64.9, 65.3, 65.8 in 66.1 J.

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

$$\chi^2_{0.025,5} = 12.83, \;\; \chi^2_{0.975,5} = 0.83$$

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}$$

$$\chi^2_{0.95,5} = 1.15$$

Testiranje hipotez

Definicija

Statistična hipoteza (domneva) je izjava o parametrih populacije.

- Ker populacijo opisujemo z verjetnostno porazdelitvijo, je hipoteza izjava o verjetnostni porazdelitvi slučajne spremenljivke.
- Hipoteza je izjava o populaciji in ne o vzorcu.

Definicija

Testiranje hipoteze (preverjanje domneve, preskus domneve) je postopek, s katerim se na podlagi podatkov pridobljenih iz vzorca odločimo, če je hipoteza v skladu s pridobljenimi podatki iz vzorca ali ne.

Hipotezo, ki jo želimo testirati (preveriti) imenujemo ničelna hipoteza oziroma osnovna domneva (null hypothesis) in jo označimo s H_0.

- Ničelna hipoteza bo vedno izjava, da ima določen parameter neko točno določeno vrednost.
  Npr. povprečna vrednost je enaka 50 cm/s, torej H_0: $\mu = 50$ cm/s.
  Ali H_0: porazdelitev je normalna.

- Vedno postavimo tudi alternativno hipotezo H_1 ali več alternativnih hipotez, ki so nezdružljive z ničelno hipotezo. Če zavrnemo ničelno hipotezo H_0, potem sprejmemo eno izmed alternativnih hipotez.
  Npr. H_1: $\mu > 50$ cm/s in H_2: $\mu < 50$ cm/s.
  Ali H_1: porazdelitev ni normalna.

Hipotezo preverimo na naslednji način:

- Postavimo ničelno in alternativno hipotezo
  H_0: ničelna hipoteza, H_1: alternativna hipoteza
- Določimo verjetnostno porazdelitev slučajne spremenljivke.
- Izberemo kritični vrednosti, ki sta meji kritičnega območja (območja zavrnitve hipoteze).
- Na vzorčnih podatkih izračunamo vrednost parametra, ki ga obravnavamo.
- Ničelno hipotezo zavrnemo ali pa je ne zavrnemo.

Primer

Hitrost izgorevanja goriva, ki se uporablja pri sistemih za reševanje letalskih posadk.

H_0: $\mu = 50$ cm / s

H_1: $\mu \neq 50$ cm / s

Denimo, da je povprečna vrednost normalno porazdeljena spremenljivka.

Določimo kritični vrednosti, npr. 48.5 in 51.5.

Izračunamo $\overline{x}$ izbranega vzorca.

Če je $\overline{x}$ znotraj kritičnih vrednosti, ničelne hipoteze ne zavrnemo, če pa je $\overline{x} < 48.5$ ali $51.5 < \overline{x}$, ničelno hipotezo zavrnemo.