Uporabna statistika

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

27. november 2013

Testiranje hipoteze o povprečni vrednosti normalno porazdeljene spremenljivke, če poznamo varianco

Naključni vzorec X_1, X_2, ..., X_n, znan standardni odklon $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, preverjamo domnevo $H_0 : \mu = \mu_0$, stopnja značilnosti α (napaka 1. vrste)

Testna statistika

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Dvostranska domneva

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Če za $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ velja

$$z_0 < -z_{\alpha/2} \text{ ali } z_0 > z_{\alpha/2},$$

hipotezo H_0 zavrnemo. Če

$$-z_{\alpha/2} \leq z_0 \leq z_{\alpha/2},$$

hipoteze H_0 ne moremo zavrniti.

Enostranska domneva

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Če za $z_0 = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ velja

$$z_0 > z_\alpha,$$

hipotezo H_0 zavrnemo. Če

$$z_0 \leq z_\alpha,$$

hipoteze H_0 ne moremo zavrniti.

Opomba

Naj bo $[l, u]$ interval zaupanja za μ s stopnjo zaupanja $1 - \alpha$. Potem bomo zavrnili hipotezo $H_0 = \mu_0$ s stopnjo značilnosti α natanko tedaj, ko μ_0 ni v intervalu $[l, u]$.

Primer.

Napaka 2. vrste in velikost vzorca

Denimo, da je H_0 napačna in da je $\mu = \mu_0 + \delta$. Potem je

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - (\mu_0 + \delta)}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

Ko je H_1 pravilna, je

$$Z_0 \sim N(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1)$$

Torej
$\beta = \Phi(-z_\beta) \simeq \Phi(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma})$ in zato

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2\sigma^2}{\delta^2}.$$

Opomba

Če preverjamo hipotezo $H_0 : \mu = \mu_0$ s stopnjo značilnosti α in je $\overline{x} \neq \mu_0$, potem bi pri dovolj velikem vzorcu hipotezo H_0 vedno zavrnili.

Ogledali smo si, kako testiramo hipotezo o povprečni vrednosti normalno porazdeljene spremenljivke, če poznamo varianco:
Naključni vzorec $X_1, X_2, \ldots, X_n$, znana standardna deviacija σ, preverjamo domnevo $H_0 : \mu = \mu_0$, stopnja značilnosti α (napaka 1. vrste)
Testna statistika

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Testiranje hipoteze o povprečni vrednosti normalno porazdeljene spremenljivke, če ne poznamo variance

Naključni vzorec $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ne poznamo standardne deviacije, preverjamo domnevo $H_0 : \mu = \mu_0$, stopnja značilnosti α (napaka 1. vrste).
Ker ne poznamo σ, izračunamo

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}.$$

Testna statistika

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

T_0 je t-porazdeljena slučajna spremenljivka z $n-1$ prostostnimi stopnjami.

Testiranje hipoteze o varianci normalno porazdeljene spremenljivke

Naključni vzorec $X_1, X_2, \ldots, X_n$, preverjamo domnevo $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$.
Ker ne poznamo σ, izračunamo $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$.
Testna statistika

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

X_0^2 je χ^2-porazdeljena slučajna spremenljivka z $n-1$ prostostnimi stopnjami.

Primer.
Preverjamo ustreznost proizvodnega procesa pri polnjenjau mlečnega izdelka v embalažo. Rezultati meritev so: 1.005, 1.001, 0.993, 0.996, 1.011, 1.021, 1.002, 1.003, 1.009, 0.997.
Če je standardni odklon prevelik, več kot 1, potem je prevelik odstotek embalaže premalo ali preveč napolnjen. Kaj lahko sklepamo o opazovanem proizvodnem procesu?

$\overline{x} = 1.0038$

$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2}{10-1} =$