

Izpitna vprašanja iz matematike 1

(prof. Slivnik)

1. Definicija enakosti, preseka, unije in razlike dveh množic.
2. Pojem množice in enakost množic.
3. Pokaži: $(x \in A \text{ ali } x \in B, x \notin A \cap B) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) - (A \cap B)$.
4. Osnovne operacije z množicami in lastnosti teh operacij.
5. Ilustriraj z Vennovim diagramom enakost $(A \cap B)' = A' \cup B'$. Opomba: tu je X' komplement množice X .
6. $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 5, 8, 10\}$. Izračunaj $A \cup B$ in $(A \cup B) \cap (A - B)$. Ali je $A \subset B$?
7. S dana množica, E, F, G delne množice množice S , E' komplement množice E glede na S . Pokažite: $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$ in $(E \cup F)' = E' \cap F'$.
8. Upodabljanje množic, definicija upodobitve in posebne lastnosti upodobitev.
9. Upodobitev $f : M_1 \rightarrow M_2$ je podana takole: $x \mapsto \ln x$. Določite definicijsko območje upodobitve in kakšna upodobitev je to.
10. Naj bo $f : A \rightarrow B$ takole definirana: $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti te funkcije. Ali je f injektivna funkcija?
11. Naštejte nekaj razlogov za razširitev številskih sistemov. Katerih principov se držimo pri razširitvah?
12. Lastnosti naravnih števil in operacij z naravnimi števili.
13. Popolna ali matematična indukcija. Ali lahko navedete kak primer?
14. Pokažite s popolno indukcijo, da je $\cos n\pi = (-1)^n$.
15. Pokažite s popolno indukcijo, da velja $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.
16. Dokaži z metodo matematične indukcije: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

17. Opišite razširitev množice naravnih števil na ulomke in naštejte lastnosti množice ulomkov.
18. Racionalna števila in njihove lastnosti.
19. Pokažite, da $\sqrt{3}$ ni racionalno število.
20. Definicija absolutne vrednosti realnega števila. Rešite $1 < |x + 1| \leq 2$.
21. Realna števila in njih upodobitev na številski premici.
22. Predočanje števil v raznih sistemih (binarni sistem).
23. Definicija kompleksnega števila, enakosti dveh kompleksnih števil in konjugirane vrednosti kompleksnega števila.
24. Absolutna vrednost kompleksnega števila.
25. Aritmetične operacije s kompleksnimi števili - definicija in lastnosti.
26. Predočanje kompleksnih števil.
27. Trigonometrična oblika kompleksnega števila $z = -\sqrt{3} + i$.
28. Moivreov izrek (pravilo). Določite z^8 , če je $z = \sqrt{3} - i$.
29. S pomočjo Moivreove formule poiščite $\sin 3\varphi$.
30. Koreni kompleksnih števil. Določite $z^{2/3}$, če je $z = 1 + i$.
31. Določite $i^{-1/3}$.
32. Izračunajte $\sqrt[3]{-1 + i}$.
33. Določite vse kompleksne točke, ki zadoščajo enačbi $|z - 3| + |z + 3| = 8$.
34. Definicija zaporedja, zgornje meje, spodnje meje in natančne zgornje in spodnje meje.
35. Kdaj imenujemo zaporedje monotono? Primer.
36. Kaj lahko poveste o monotoni, omejenih zaporedjih?
37. Definicija stekališča zaporedja. Poiščite stekališče za zaporedje $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \dots$
38. Določite infimum, supremum in stekališča zaporedja $a_n = (-1)^n/n + (1 + (-1)^n)/2$.

39. Določite infimum in supremum zaporedja $a_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.
40. Definicija konvergentnega zaporedja - limita zaporedja.
41. Ali je $a = 1$ limita zaporedja $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \dots$?
42. Kaj sledi iz predpostavke, da je zaporedje omejeno in ima eno samo stekališče?
43. Ali je zaporedje $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \dots$ konvergentno in koliko ima stekališč?
44. Cauchyjev pogoj za konvergenco.
45. Dokažite, da konvergentno zaporedje a_1, a_2, a_3, \dots z limito a ustreza Cauchyjevemu pogoju.
46. Pravila za računanje z limitami.
47. Izračunajte $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n$.
48. Dokažite, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$.
49. Definicija potence z iracionalnim eksponentom.
50. Definicija števila e .
51. Izračunajte $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{a}{n})^n$.
52. Analizirajte zaporedje $a_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}$.
53. Izračunajte $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
54. Izračunajte $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n^2+1}$.
55. Poišči limito zaporedja $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$; $x_0 = 1$, če veš, da limita eksistira.
56. Ugotovite limito zaporedja $a_n = \frac{n}{n+1}$ in določite od katerega člena naprej so vsi nadaljni v ε -okolici limite, če je $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-6}$.
57. Ugotovite limito zaporedja $a_n = \frac{2n+1}{3n-2}$ in določite člen, od katerega naprej so vsi v ε -okolici limite, če je $\varepsilon = 10^{-2}$.
58. Pokaži, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2 + \dots + n)/n^2 = \frac{1}{2}$.
59. Analizirajte zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$.
60. Analizirajte zaporedje $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{n sodo število,} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, & \text{n liho število.} \end{cases}$

61. Izračunajte limito zaporedja s splošnim členom $a_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)/2^{-n}$.
62. Poiščite limito zaporedja $a_n = \sqrt[n]{3} - 1$ in določite člen n_0 , od katerega se vsi nadaljni razlikujejo od limite za manj kot ε .
63. Ugotovite ali je zaporedje $\{\sin \frac{n\pi}{2} + \cos n\pi\}$ omejeno. Če je omejeno, določite obe meji (infimum in supremum).
64. Ugotovite, ali je zaporedje $a_n = \sqrt[n+1]{3}$ omejeno. Če je, določite obe natančni meji.
65. Poiščite limito zaporedja $a_n = \frac{1}{1+c^n}$, $|c| > 1$. Določite še člen n_0 , od katerega dalje se limita razlikuje za manj od ε .
66. Neskončno zaporedje ima samo eno stekališče. Odgovorite ali je zaporedje
- konvergentno,
 - ni konvergentno,
 - če je še omejeno, je konvergentno,
 - če je še omejeno, ni konvergentno.
67. Dana je funkcija $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ in zaporedja $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$, $z_n = \frac{1}{(2n+\frac{3}{2})\pi}$, $n = 1, 2, \dots$. Določi limite zaporedij $f(x_n)$, $f(y_n)$, $f(z_n)$.
68. Definicija in konvergenca neskončne vrste.
69. Cauchyjev pogoj za konvergenco neskončne vrste.
70. Kaj je potreben pogoj za konvergenco neskončne vrste?
71. Kaj je to majoranta vrste in kako jo uporabljamo pri ugotavljanju konvergenca neskončnih vrst?
72. Navedite kriterije za zagotavljanje konvergenca neskončnih vrst.
73. Ugotovi ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$ konvergentna.
74. Ugotovi ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ konvergentna.
75. Kako se glasi harmonična vrsta in pokažite, da je to divergentna vrsta.

76. Za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$; $k > 1$ ugotovite konvergenco z integralskim kriterijem.
77. Kdaj pravimo, da je neskončna vrsta absolutno konvergentna?
78. Kdaj je neskončna vrsta pogojno konvergentna vrsta?
79. Ali je vsaka absolutno konvergentna vrsta tudi konvergentna in če je, zakaj?
80. Kaj je to alternirajoča vrsta in kdaj je taka vrsta konvergentna?
81. Navedite primer, ki kaže, da pogoj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ni zadosten za konvergenco neskončne vrste.
82. Definicija funkcije.
83. Kako je lahko podan funkcijski predpis? Primeri.
84. $x = t^3, y = t^2$. Kako se glasi zapis v implicitni obliki?
85. Nariši primer konstantne funkcije, stopničaste funkcije in $y = |x|$.
86. Kdaj pravimo, da je funkcija soda, liha in kdaj omejena na danem intervalu?
87. Polinom - ničle, graf.
88. Pokaži, da ima enačba $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ vsaj en realen koren.
89. Racionalne funkcije - asimptote, poli.
90. Transcendentne funkcije - definicijsko območje, zaloga vrednosti, primeri.
91. Splošna oblika iracionalne funkcije - primer kake iracionalne funkcije.
92. Obrat funkcijske zveze - inverzne funkcije.
93. Določi inverzno funkcijo k funkciji $y = \cos x + 2$.
94. Logaritemska funkcija - slika in lastnosti.
95. Kotne funkcije in obrat le-teh.
96. Ciklometrične funkcije - narišite $\arcsin x$ in $\arctg x$.
97. Hiperbolične funkcije.

98. Narišite $\operatorname{ch}x$ in $\operatorname{cth}x$.
99. Narišite $\operatorname{sh}x$ in $\operatorname{th}x$.
100. Definicija zveznosti funkcije v točki.
101. Zveznost funkcije v točki: zveznost z desne. Primer - slika.
102. Narišite funkcijo $y = \frac{\sin x}{|x|}$.
103. Definicija enakomerne zveznosti funkcije na danem intervalu.
104. Dokažite: če je zaporedje x -ev konvergentno in je pri limitnem x -u funkcija zvezna, konvergira zaporedje ustreznih funkcijskih vrednosti proti vrednosti, ki jo funkcija zavzame pri limitnem x -u.
105. Naj bosta $f(x)$ in $g(x)$ za $x = x_0$ zvezni. Pokažite, da je $f(x) + g(x)$ pri $x = x_0$ zvezna funkcija.
106. Če je $f(x)$ za $x = x_0$ zvezna in $F(x_0) \neq 0$, pokažite, da je $1/f(x)$ za $x = x_0$ tudi zvezna funkcija.
107. Kako je z zveznostjo posredne funkcije $y = y(u(x))$?
108. Dokažite, da so polinomi zvezne funkcije in racionalne funkcije tudi, z izjemo v polih.
109. Pokažite, da je funkcija e^x zvezna funkcija.
110. Dokažite zveznost funkcij $\sin x$, $\operatorname{tg}x$ in $\cos x$.
111. Definicija limitne vrednosti funkcije.
112. Pokažite: $f(x)$ za $x = x_0$ je zvezna $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
113. Pokažite, da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Bx}{x} = B$.
114. Narišite funkcijo $y = a^{1/x}$, $a > 1$.
115. Naštejte lastnosti zveznih funkcij.
116. Ali je funkcija $f(x) = \sin(\cos(x^3)e^x)$ zvezna?
117. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^3 \frac{x}{4}}{x^3}$.
118. Poiščite levo in desno limito funkcije $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, ko gre x proti nič.

119. Pokažite, da je $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right)^{\frac{\sin(3(x-2))}{x-2}} = \left(\frac{1}{4} \right)^3$.
120. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$.
121. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x}$.
122. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+10x)}{x}$.
123. Narišite graf funkcije $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.
124. Narišite graf funkcije $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^n}$, $x \geq 0$.
125. Določite definicijsko območje funkcije $f(x) = \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$. Koliko je $f(1)$?
126. Narišite graf funkcije $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.
127. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.
128. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.
129. Izračunajte levo in desno limito funkcije $f(x) = \frac{x}{1+e^{\operatorname{tg} x}}$, ko gre $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.
130. Definicija odvoda.
131. Izračunajte s pomočjo definicije odvod funkcije $y = x^2 + 3x + 7$.
132. Definirajte levi in desni odvod funkcije v dani točki.
133. Poiščite $f'_-(0)$ in $f'_+(0)$ za funkcijo $y = |x|$.
134. Geometrijska interpretacija odvoda.
135. Dokažite, da je odvedljiva funkcija tudi zvezna.
136. Ali je vsaka funkcija tudi odvedljiva? Navedite kak primer.
137. Odvod obratne (inverzne) funkcije.
138. Določi odvod inverzne funkcije.
139. Odvodi ciklotometričnih funkcij. Izpeljite odvod funkcije $y = \operatorname{arctg} x$ in $y = \operatorname{arcctg} x$.
140. Diferencial funkcije in njegov geometrijski pomen.
141. Ocena funkcijskih vrednosti s pomočjo diferenciala.

142. Višji odvodi. Določite $\sin^{(n)} x$.
143. Izpeljite drugi odvod za indirektno funkcijo.
144. Naj bo $x_0 \in [a, b]$, $f(x)$ odvedljiva funkcija in $f'(x_0) > 0$. Pokažite, da funkcija v točki x_0 narašča.
145. Rollejev izrek.
146. Fermatov izrek.
147. Lagrangeov izrek.
148. Ekstrem funkcije - določitev s prvim odvodom.
149. Določitev ekstrema funkcije z drugim odvodom.
150. Pokažite, da je odvedljiva funkcija $f(x)$ na $[a, b]$, za katero je za vsak $x \in [a, b]$ $f'(x) = 0$, konstanta.
151. Pokažite, da se dve funkciji, katerih odvod je povsod enak, razlikujeta za aditivno konstanto.
152. Navedite kako ugotovimo prevojno točko (obračaj).
153. Ali je za $y = \operatorname{tg} x$ na $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ točka $x = 0$ obračaj in zakaj?
154. Ali je za $y = x^3$, $[-1, 1]$ točka $x = 0$ obračaj in zakaj?
155. L'Hopitalovo pravilo.
156. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\cos \pi x / 2}$.
157. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.
158. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{x}}{\operatorname{ctg} bx}$, $a, b \in \mathbb{R}$.
159. S pomočjo diferenciala ocenite vrednost $\sqrt[3]{26,19}$.
160. S pomočjo diferenciala ocenite vrednost $\sqrt{8,76}$.
161. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}$. Določite definicijsko območje in izračunajte odvod funkcije. Koliko je $y'(0)$?
162. $y = \ln(\ln(\ln x))$. Določite y' in definicijsko območje.
163. $y = \sqrt{x}$. Določite y' .

164. $y = x^{\sin x}$. Določite y' .
165. Izračunajte odvod funkcije $y = 2^{\operatorname{tg}^2(\frac{1}{x})}$.
166. Določite ekstrem funkcije $y = x^2 \ln x$.
167. Določite ekstrem funkcije $y = x^2 e^{-x^2}$.
168. Za koliko se spremeni ploščina krožnega izseka ($R = 100\text{cm}$, $\alpha = 60^\circ$), če se
- spremeni radij za $+1\text{cm}$,
 - spremeni kot za $-3'$.
169. V kateri točki funkcije $y = x^3$ na $[a, b]$ je sekanta vzporedna tangenti?
170. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}$.
171. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$.
172. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-2x}$.
173. Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$. ($\frac{1}{x} = t$)
174. Definicija lokalnega maksimuma in lokalnega minimuma.
175. Definicija nedoločenega integrala.
176. Pojem določenega integrala.
177. Definicija določenega integrala.
178. Pogoji za integrabilnost funkcij.
179. Integrabilnost funkcij. Katere funkcije so integrabilne?
180. Lastnosti določenega integrala.
181. Izrek o povprečni vrednosti integrala.
182. Zakaž velja ocena $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$?
183. Pokažite, da je določeni integral enolična in zvezna funkcija zgornje meje.
184. Pokažite, da je določeni integral odvedljiva funkcija zgornje meje.

185. Kaj je vrednost odvoda določenega integrala za zgornjo mejo?
186. Zveza med določenim in nedoločenim integralom.
187. Uvedba nove spremenljivke v nedoločeni integral.
188. Uvedba nove spremenljivke v določeni integral.
189. Integracija po delih. Izračunajte $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx$, $a, b > 0$.
190. Integrali racionalnih funkcij - način reševanja.
191. Izračunajte $\int \frac{dx}{1+x^3}$.
192. Izračunajte $\int \frac{11x+16}{(x^2+2x+2)^2} dx$.
193. Izračunajte $\int \frac{x}{(x-1)(x+2)^2} dx$.
194. Izračunajte $\int \sqrt{3+2x-x^2} dx$.
195. Izračunajte $\int \sqrt{x^2+k} dx$.
196. Izračunajte $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$.
197. Opišite način reševanja integralov oblike $\int R(\sin x, \cos x) dx$.
198. Izračunajte $\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x}$.
199. Izračunajte $\int \frac{dx}{5+3 \cos x}$.
200. Izračunajte $\int \sin 3x \sin 5x dx$.
201. Izračunajte $\int \cos^4 x dx$.
202. Izračunajte $\int \sin^6 x dx$.
203. Izračunajte $\int \frac{e^{3x}}{e^x+2} dx$.
204. Posplošeni integrali.
205. Ali konvergira integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$?
206. Izračunajte $\int \frac{\ln x}{x} dx$.
207. Izračunajte $\int_0^3 x \arctg x dx$.
208. Ali integral $\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$ konvergira ali divergira?

209. Ploščina izseka - izpeljite formulo.
210. Diferencial ploščine - v kartezični, parametrični in polarni obliki.
211. Ločna dolžina - izpeljava.
212. Izračunajte dolžino krivulje $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$ za $x = 1$ do $x = e$.
213. Izračunajte dolžino loka cikloide: $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$.
214. Prostornina rotacijskega telesa.
215. Površina rotacijskega telesa.
216. Določite dolžino srčnice: $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.
217. Cikloida ($x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$) naj se zavrti okrog osi x .
Izračunajte površino rotacijske ploskve.
218. Cikloida ($x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$) naj se zavrti okrog osi x .
Izračunajte prostornino rotacijskega telesa.