Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

3. oktober 2013

Primer

Število 6 deli izraz $n^3 + 3n^2 - 4n + 6$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Množica naravnih števil je najmanjša možna neskončna množica. Pravimo, da je množica naravnih števil števno neskončna.

Na množici naravnih števil sta definirani operaciji seštevanja in množenja. Za ti dve operaciji veljajo naslednja pravila:

- $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$, komutativnost
- $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, asociativnost
- $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, distributivnost

Množica naravnih števil je zaprta za seštevanje in množenje:

- vsota poljubnih dveh naravnih števil je zopet naravno število
- zmnožek poljubnih dveh naravnih števil je zopet naravno število

Ni pa to res na primer za vsako podmnožico naravnih števil. Množica lihih števil ni zaprta za seštevanje.

Ne obstaja pa vedno v množici naravnih števil za dani naravni števili n in m rešitev enačbe

$$n + x = m.$$

Če je $m > n$, potem obstaja natanko en $x \in \mathbb{N}$, ki je rešitev enačbe, če je $m \leq n$, rešitev v okviru naravnih števil ne obstaja.
To je eden izmed razlogov, da množico naravnih števil razširimo do množice celih števil.

1.2. Cela števila

Množico celih števil označimo z

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Lastnosti:

- Množica celih števil je zaprta za seštevanje in množenje.
- Vsako celo število ima svojega neposrednega predhodnika in neposrednega naslednika.
- Ne vsebuje pa vsaka podmnožica celih števil najmanjšega elementa.
  (Ne moremo uporabiti matematične indukcije.)

Za operacijo seštevanja je število 0 nevtralni element, kar pomeni, da je

$$a + 0 = a \quad \text{za vsak } a \in \mathbb{Z}.$$

Vsak element $a \in \mathbb{Z}$ ima nasprotni ali inverzni element $-a$ za seštevanje. To pomeni, da za vsako celo število $a \in \mathbb{Z}$ obstaja tako celo število $-a \in \mathbb{Z}$, da je njuna vsota enaka nevtralnemu elementu za seštevanje, torej

$$a + (-a) = 0.$$

Tudi za operacijo množenja obstaja nevtralni element ali enota in sicer število $1 \in \mathbb{Z}$. To pomeni, da je

$$a \cdot 1 = a \quad \text{za vsak} \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Ne obstaja pa za vsako celo število $a \in \mathbb{Z}$ obratni element oziroma inverz za množenje, torej tako število $b \in \mathbb{Z}$, da bi bilo

$$a \cdot b = 1.$$

Drugače povedano, če delimo dve celi števili, potem rezultat ni več nujno celo število.

V množici celih števil torej ne obstaja vedno rešitev enačbe

$$a \cdot x = 1.$$

Pravzaprav obstaja rešitev v množici celih števil samo, če je $a = 1$ ali $a = -1$.
To je eden izmed razlogov, da množico celih števil razširimo do množice racionalnih števil, v kateri ima vsako število, razen števila 0, inverzni element za množenje.

1.3. Racionalna števila

Ulomek je urejen par celih števil a in b, $b \neq 0$, ki ga običajno zapišemo v obliki $\frac{a}{b}$.
Število a imenujemo števec, število b pa imenovalec ulomka $\frac{a}{b}$.
Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ predstavljata isto racionalno število, torej $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, če je $ad = bc$.
Enako količino torte pojemo, če jo pojemo $\frac{1}{2}$ ali $\frac{2}{4}$ ali $\frac{3}{6}$, ...
Množico racionalnih števil označimo s

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\},$$

pri čemer ulomke, ki predstavljajo isto racionalno število, identificiramo.

Vsako celo število $a \in \mathbb{Z}$ lahko predstavimo kot racionalno število $\frac{a}{1}$, torej je $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Množica racionalnih števil je urejena.
Za števili $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ velja, da je

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad ad \leq bc.$$

Če sta $a, c \in \mathbb{Z}$ in je $a < c$, potem je $a \cdot 1 < 1 \cdot c$, torej

$$\frac{a}{1} < \frac{c}{1}.$$

Urejenost na $\mathbb{Q}$ je razširitev urejenosti na $\mathbb{Z}$.

Nima pa racionalno število enolično določenega predhodnika ali naslednika.
Na primer, če sta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ poljubni različni racionalni števili, potem je aritmetična sredina teh dveh števil

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}=\frac{ad+bc}{2bd}$$

racionalno število, ki leži med števili $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$.

Na množici racionalnih števil definiramo:

- operacijo seštevanja s predpisom

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

- operacijo množenja s predpisom

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Hitro lahko preverimo, da sta tako definirani operaciji asociativni, komutativni in distributivni.

Preverimo na primer asociativnost seštevanja:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{(ad+bc)f+bde}{bdf}$$

$$=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$$

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}+\frac{cf+de}{df}=\frac{adf+b(cf+de)}{bdf}$$

$$=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$$

V množici racionalnih števil za vsako neničelno racionalno število $\frac{a}{b}$ obstaja njegovo obratno ali inverzno število za množenje, to je tako število $x \in \mathbb{Q}$, da je

$$\frac{a}{b} \cdot x = x \cdot \frac{a}{b} = 1.$$

Torej je

$$x = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Množenju racionalnega števila $\frac{a}{b}$ z inverzom števila $\frac{c}{d}$ pravimo deljenje in pišemo

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

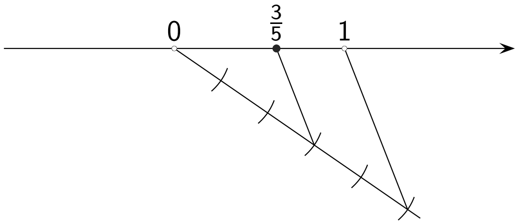
Operaciji seštevanja in množenja na celih številih in racionalnih številih se ujemata, zato pravimo, da je množica racionalnih števil razširitev množice celih števil.

Na primer, naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}$:

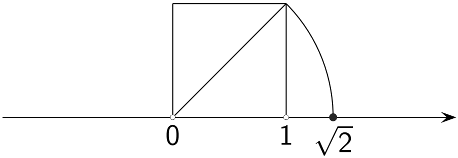
$$\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a \cdot 1 + 1 \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{a+b}{1} = a + b$$

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{ab}{1} = ab$$

Vsako racionalno število lahko predstavimo s točko na številski premici.



Vendar pa ne moremo vsake točke na številski premici predstaviti z racionalnim številom. Če na primer na številski premici označimo razdaljo, ki je enaka dolžini diagonale enotskega kvadrata, potem točka, ki je po Pitagorovem izreku na dolžini $\sqrt{2}$ od 0, ni racionalno število.



Pitagora (570 p.n.š. - 495 p.n.š.), grški matematik, rojen na Samosu, živel tudi v Crotonu v Italiji

Hippasus (5. stoletje p.n.š.)

Evklid (okoli 365 p.n.š. - 275 p.n.š.), grški matematik, ki je živel v Aleksandriji.
Napisal je eno najpomembnejših matematičnih knjig Elementi (zbirka 13 knjig), v kateri je opisal vse, kar so do takrat vedeli o geometriji in teoriji števil.