Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

8. oktober 2013

Izrek

Število $\sqrt{2}$ ni racionalno število.

Dokaz.

Izrek bomo dokazali s protislovjem. To pomeni, da bomo privzeli, da je $\sqrt{2}$ racionalno število, nato pa pri tej predpostavki s pravilnim sklepanjem prišli do protislovja. Ker bodo vsi sklepi pravilni, na koncu pa bomo prišli do protislovja, pomeni, da bo naša začetna predpostavka napačna.

Privzemimo torej, da je $\sqrt{2}$ racionalno število in ga lahko zato zapišemo v obliki ulomka

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad \text{kjer sta} \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

Lahko tudi privzamemo, da je ulomek $\frac{a}{b}$ okrajšan (če ni, ga okrajšamo). Števili a in b sta potem tuji.

Enakost $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ kvadriramo in dobimo

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

oziroma

$$2b^2 = a^2.$$

Naravno število a^2 je torej sodo, kar je mogoče le, če je a tudi sodo število. Vsako sodo število pa lahko zapišemo v obliki $a = 2k$, kjer je $k \in \mathbb{N}$.

Sledi, da je

$$2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

in zato

$$b^2 = 2k^2.$$

To pa pomeni, da je b^2 sodo število in zato mora biti tudi b sodo število.
Sledi, da sta tako a kot tudi b sodi števili.
Prišli smo do protislovja, saj smo privzeli, da sta a in b tuji števili.
Torej je bila začetna predpostavka napačna in $\sqrt{2}$ ni racionalno število.

1.4. Realna števila

Videli smo, da ne moremo vsake točke na številski premici predstaviti z racionalnim številom.
Množica racionalnih števil ni polna, zato jo dopolnimo do množice realnih števil, ki jo označimo z $\mathbb{R}$.
Formalna razširitev ni preprosta, zato je ne bomo naredili.

Izrek

Vsako realno število je predstavljeno z natanko eno točko na številski premici in vsaka točka na številski premici predstavlja natanko eno realno število.

Torej obstaja bijektivna preslikava med množico realnih števil in množico točk na številski premici.

Množica realnih števil $\mathbb{R}$ je urejena. Za realni števili a in b velja, da je $a < b$, če je število a na številski premici levo od števila b.
Zapišimo nekatere podmnožice realnih števil, definirane s pomočjo urejenosti:

- $(a, b) = \{x : a < x < b\}$, odprti interval,
- $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$, zaprti interval,
- $[a, \infty) = \{x : a \leq x\}$, zaprti poltrak,
- $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$, odprti poltrak.

Kljub temu, da vseh točk na številski premici ne moremo predstaviti z racionalnimi števili, pa lahko poljubno blizu kateregakoli realnega števila na številski premici najdemo neko racionalno število.
To lahko storimo na primer z metodo bisekcije.
Naj bo $r \in \mathbb{R}$ poljubno realno število ter a in b taki racionalni števili, da je $a < r < b$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tako racionalno število $c \in \mathbb{Q}$, da je $-\varepsilon < r - c < \varepsilon$.
Pravimo, da je množica racionalnih števil gosta.

Če je

$$r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

potem pravimo, da je r iracionalno število.

Kako zapišemo realno število?
Realna števila običajno zapišemo v decimalni obliki.
Baza decimalnega sistema je število 10.
V tem primeru $r \in \mathbb{R}$ zapišemo v obliki

$$r = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + \ldots .$$

Lahko pa je baza tudi kakšno drugo število, največkrat se uporablja za bazo število 2, redkeje tudi 8 ali 16.

Primer

Zapišimo v binomskem zapisu realno število 21.7.
Najprej pretvorimo celi del števila:

- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 21, je $2^4 = 16$, torej $21 = 1 \cdot 2^4 + 5$.
- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 5, je $2^2 = 4$, torej $21 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1$.
- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 1, je $2^0 = 1$, torej $21 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

Izračunali smo, da je

$$21_{(10)} = 10101_{(2)}.$$

Primer

Pretvorimo še neceli del števila:

- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 0.7, je $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$, torej $0.7 = 1 \cdot 2^{-1} + 0.2$.
- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 0.2, je $2^{-3} = 0.125$, torej $0.7 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0.075$.
- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 0.075, je $2^{-4} = 0.0625$, torej
  $0.7 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0.0125$.

Primer

Opazimo, da število 0.7 nima končnega binarnega zapisa,

$$0.7_{(10)} = 0.1011\ldots_{(2)}\,.$$

Torej

$$21.7_{(10)} = 10101.10111\ldots_{(2)}\,.$$

Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ definiramo absolutno vrednost realnega števila $r \in \mathbb{R}$ s predpisom:

$$|r| = r, \quad \text{če je} \quad r \geq 0$$

in

$$|r| = -r, \quad \text{če je} \quad r \leq 0.$$

Naj bo $c \geq 0$. Potem je

$$|a| \leq c$$

natanko tedaj, ko je

$$-c \leq a \leq c.$$

Dokaz. Če je $a \geq 0$, je $a = |a| \leq c$, če pa je $a \leq 0$, je $-a = |a| \leq c$, torej $-c \leq a$.

Naj bo $c \geq 0$. Potem je

$$|x - a| \leq c$$

natanko tedaj, ko je

$$a - c \leq x \leq a + c.$$

Za absolutno vrednost veljajo naslednje lastnosti:

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|-a| = |a|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$, trikotniška neenakost
- $||a| - |b|| \leq |a-b|$

Dokaz. Neenakost

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

bomo pokazali tako, da bomo preverili, da je

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Zapišemo

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|,$$

torej je

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Podobno zapišemo

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|,$$

torej je

$$-|b - a| = -|a - b| \leq |a| - |b|.$$

Primer

Poišči vse vrednosti x, za katere velja

$$|x-5|<2.$$

Velja $|x-5|<2$, torej je

$$-2<x-5<2$$

in zato

$$3<x<7.$$

1.5. Kompleksna števila

Hitro se prepričamo, da nobeno realno število ni rešitev enačbe

$$x^2 = -1.$$

To je eden izmed motivov, da razširimo množico realnih števil do množice kompleksnih števil.

Spomnimo se, da smo ulomek definirali kot urejeni par celih števil $\frac{a}{b}$, prvo celo število a je števec, drugo celo število b pa imenovalec ulomka.
Podobno definiramo kompleksno število kot par realnih števil (a, b), prvo realno število a imenujemo realni del, drugo realno število b pa imaginarni del kompleksnega števila.
Kompleksni števili (a, b) in (c, d) sta enaki natanko tedaj, ko imata enaka realna dela in enaka imaginarna dela, torej $a = c$ in $b = d$.
Množico kompleksnih števil označimo s $\mathbb{C}$. Torej je

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Vsako realno število $a \in \mathbb{R}$ lahko predstavimo kot kompleksno število $(a, 0)$, torej je $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Na množici kompleksnih števil definiramo:

- operacijo seštevanja s predpisom

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

- operacijo množenja s predpisom

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Hitro lahko preverimo, da sta tako definirani operaciji asociativni, komutativni in distributivni.

Preverimo na primer asociativnost množenja:

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f)$$

$$= ((ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e)$$

$$= (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)$$

$$(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f)) = (a,b)\cdot(ce-df, cf+de)$$

$$= (a(ce-df)-b(cf+de), a(cf+de)+b(ce-df))$$

$$= (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf)$$