# Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

17. oktober 2013

### Opomba

Če je $\{a_n\}$ naraščajoče zaporedje, potem je navzdol omejeno z $a_1$. Torej je $a_1 = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

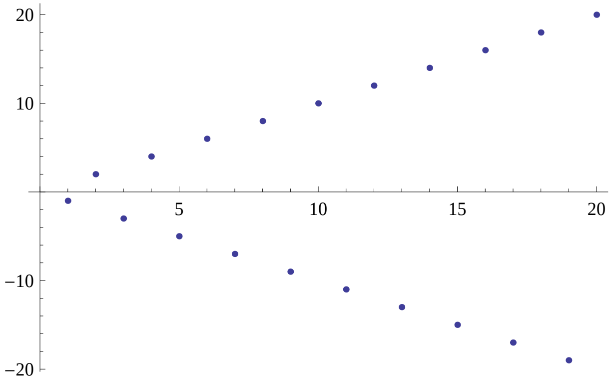
Podobno je padajoče zaporedje $\{a_n\}$ navzgor omejeno z $a_1$. Torej je $a_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

## Primer

$a_n = \frac{n+1}{n}$

## Primer

Zaporedje $a_n = n(-1)^n$ ni omejeno navzdol in navzgor.

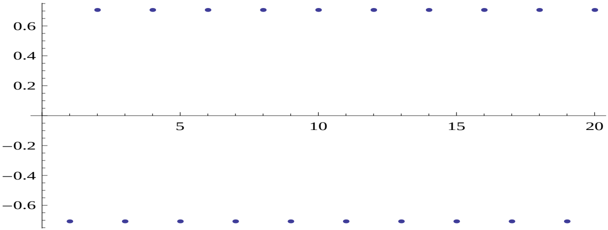


## Definicija

Če se členom zaporedja izmenoma menja predznak, torej $a_n a_{n+1} < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je zaporedje alternirajoče.

## Primer

$$a_n = \cos(\frac{\pi}{4} + n\pi)$$



# Konvergenca zaporedij

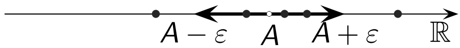
### Definicija

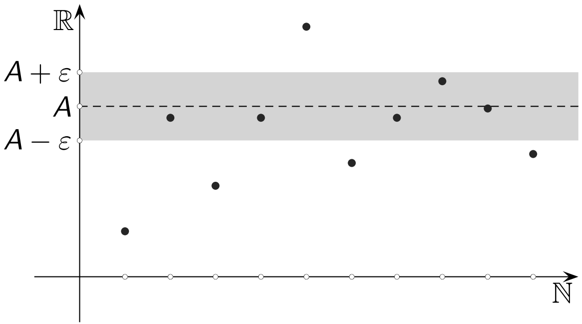
Število $A$ je stekališče zaporedja $\{a_n\}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja neskončno členov zaporedja, za katere velja $|A - a_n| < \varepsilon$.
Torej je za vsak $\varepsilon > 0$ na intervalu $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ neskončno členov zaporedja $\{a_n\}$.

### Opomba

Naj bo $\varepsilon > 0$. Interval $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ imenujemo tudi $\varepsilon$-okolica števila $A$.

# Primer


$A-\varepsilon$
$A$
$A+\varepsilon$
$\mathbb{R}$

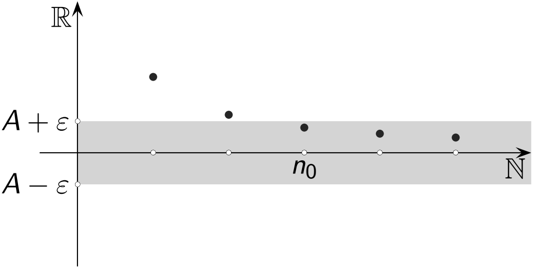

$\mathbb{R}$
$A+\varepsilon$
$A$
$A-\varepsilon$
$\mathbb{N}$

## Definicija

Število $A$ je limita zaporedja $\{a_n\}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|A - a_n| < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$.
Torej so za poljuben $\varepsilon > 0$ na intervalu $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ vsi členi zaporedja od nekega člena zaporedja $a_{n_0}$ dalje.
Če tako število $A$ obstaja, ga imenujemo limita zaporedja $\{a_n\}$, pravimo, da je zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno, in pišemo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$


$A-\varepsilon$
$A$
$A+\varepsilon$
$\mathbb{R}$


$\mathbb{R}$
$A+\varepsilon$
$A-\varepsilon$
$n_0$
$\mathbb{N}$

### Definicija

Če tako število $A$ ne obstaja, potem pravimo, da je zaporedje $\{a_n\}$ divergentno.

### Trditev

*Naj bo A limita zaporedja* $\{a_n\}$. *Potem je za vsak* $\varepsilon > 0$ *zunaj intervala* $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ *največ končno mnogo členov zaporedja* $\{a_n\}$.

## Izrek

*Vsaka limita je tudi stekališče zaporedja. Ni pa vsako stekališče nujno limita zaporedja.*

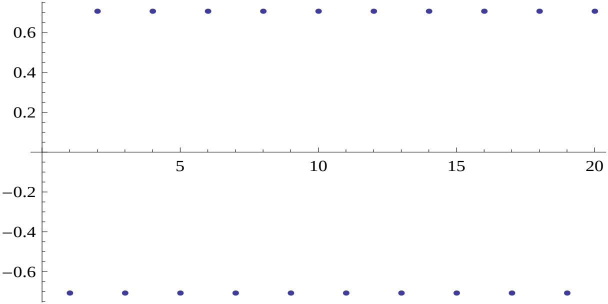
## Dokaz

*Naj bo* $\{a_n\}$ *konvergentno zaporedje, torej obstaja limita zaporedja* $A = \lim_{n\to\infty} a_n$.

*Naj bo* $\varepsilon > 0$ *poljuben. Ker je* $A$ *limita zaporedja, obstaja tak indeks* $n_0 \in \mathbb{N}$, *da velja* $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ *za vsak* $n > n_0$. *Takih* $n$ *je neskončno, torej je v vsaki* $\varepsilon$*-okolici števila* $A$ *neskončno členov zaporedja in* $A$ *je zato stekališče zaporedja* $\{a_n\}$.

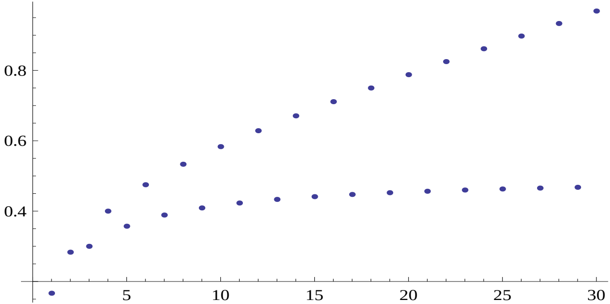
## Primer

Če ima zaporedje več stekališč, potem nobeno izmed stekališč ni limita zaporedja.



## Primer

Tudi, če ima zaporedje eno samo stekališče, to ni nujno limita zaporedja.



## Trditev

*Če je $\{a_n\}$ konvergentno zaporedje, potem je omejeno in ima natanko eno stekališče.*

Naj bo $\{a_n\}$ konvergentno zaporedje, torej obstaja limita zaporedja $A = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Pokazali smo že, da je limita tudi stekališče zaporedja.
Denimo, da bi obstajalo še eno stekališče $B \neq A$ zaporedja $\{a_n\}$.

Naj bo $\varepsilon = |A - B|/3$.
Ker je $A$ limita zaporedja, obstaja tak indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ za vsak $n > n_0$.
Torej so na intervalu $(B - \varepsilon, B + \varepsilon)$ lahko samo tisti členi zaporedja $a_n$, za katere je $n \leq n_0$, torej je v $\varepsilon$-okolici števila $B$ največ končno členov zaporedja in $B$ ni stekališče zaporedja $\{a_n\}$.
Pokazali smo, da ima konvergentno zaporedje natanko eno stekališče.

Pokažimo še, da je konvergentno zaporedje omejeno.
Naj bo $\varepsilon > 0$ in $n_0$ tak indeks, da je $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ za vsak $n > n_0$.
Najmanjši in največji element množice s končno elementi vedno obstaja, torej lahko definiramo

$$m_0 = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, A-\varepsilon\}$$

in

$$M_0 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, A+\varepsilon\}.$$

Potem je

$$m_0 \leq a_n \leq M_0$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, torej je zaporedje $\{a_n\}$ res omejeno.

## Trditev

*Če je* $\{a_n\}$ *omejeno zaporedje in ima natanko eno stekališče, potem je to stekališče limita zaporedja* $\{a_n\}$.

Dokaz trditve opustimo.
Če zadnji dve trditvi združimo, dobimo naslednji izrek.

## Izrek

*Zaporedje* $\{a_n\}$ *je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima natanko eno stekališče.*

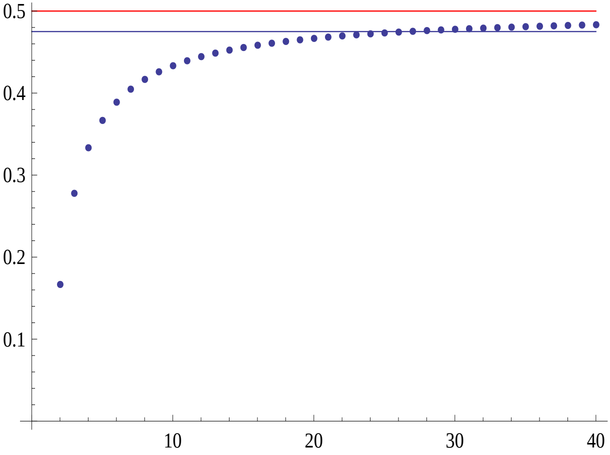
## Izrek

*Če je naraščajoče zaporedje $\{a_n\}$ omejeno, potem je konvergentno in njegova limita je enaka natančni zgornji meji zaporedja, torej*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

*Če je padajoče zaporedje $\{a_n\}$ omejeno, potem je konvergentno in njegova limita je enaka natančni spodnji meji zaporedja, torej*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
10
20
30
40

## Dokaz

*Naj bo* $\{a_n\}$ *omejeno naraščajoče zaporedje, naj bo* $M_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ *in naj bo* $\varepsilon > 0$ *poljuben.*
*Ker je* $M_0$ *natančna zgornja meja zaporedja* $\{a_n\}$, $M_0 - \varepsilon$ *pa ni več zgornja meja zaporedja, obstaja tak indeks* $n_0$, *da je* $a_{n_0} > M_0 - \varepsilon$.
*Zaporedje* $\{a_n\}$ *je naraščajoče, torej je* $a_n > a_{n_0} > M_0 - \varepsilon$ *za vsak* $n > n_0$.
*Hkrati pa velja* $a_n \leq M_0$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$, *saj je* $M_0$ *zgornja meja zaporedja.*
*Torej so na intervalu* $(M_0 - \varepsilon, M_0 + \varepsilon)$ *vsi členi zaporedja* $a_n$ *za* $n \geq n_0$ *in* $M_0$ *je limita zaporedja* $\{a_n\}$.