Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

22. oktober 2013

Kdaj je zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno, smo definirali s pomočjo limite zaporedja. Večkrat pa je dobro vedeti, kdaj je zaporedje konvergentno, tudi če ne poznamo limite zaporedja.

Izrek (Cauchyjev pogoj)

Zaporedje $\{a_n\}$ *je konvergentno natanko tedaj, ko za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja tak* $n_0 \in \mathbb{N}$, *da je*

$$|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$$

za vsak $n > n_0$ *in za vsak* $k \in \mathbb{N}$.

Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857)
Francoski matematik, znan po rezultatih s področja kompleksne analize.

Dokaz

Dokazali bomo implikacijo samo v eno smer.
Naj bo zaporedje $\{a_n\}$ *konvergentno in naj bo* $A = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Naj bo $\varepsilon > 0$ *poljuben. Potem obstaja tak indeks* n_0*, da je*

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{za vsak} \quad n > n_0.$$

Če je $n > n_0$ *in* $k \in \mathbb{N}$ *poljuben, potem je tudi* $n + k > n_0$ *in zato*

$$|a_{n+k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{za} \quad n > n_0 \quad \textit{in} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sledi

$$|a_n - a_{n+k}| = |a_n - A + A - a_{n+k}| \leq |a_n - A| + |A - a_{n+k}|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Izrek pove, da je zaporedje konvergentno natanko tedaj, kadar lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo tak indeks n_0, da se poljubna člena zaporedja z indeksom večjim od n_0 razlikujeta za manj kot ε.

Opomba

Naj bo zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno in naj bo $\{b_n\}$ zaporedje, ki se od zaporedja $\{a_n\}$ razlikuje v končno mnogo členih. Potem je tudi zaporedje $\{b_n\}$ konvergentno in ima enako limito kot zaporedje $\{a_n\}$.

Računanje z zaporedji

Naj bosta $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ konvergentni zaporedji.
Potem velja:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(c a_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Če dodatno velja še, da je $b_n \neq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in je $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, potem velja tudi

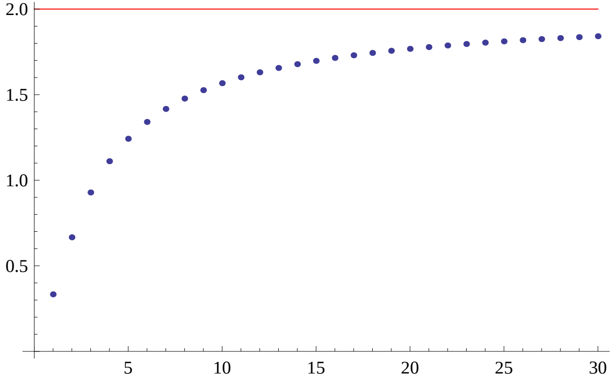
- $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Primer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-4n+1+1}{2n^2+3n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(4-\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2})}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}} = \frac{4}{2} = 2$$



2.0
1.5
1.0
0.5
5
10
15
20
25
30

V nadaljevanju bomo s pomočjo zaporedij definirali potenco realnega števila z iracionalnim eksponentom. Pri izpeljavi bomo potrebovali naslednji rezultat.

Izrek (Bernoullijeva neenakost)

Za vsako pozitivno število x *in vsako naravno število* $n > 1$ *velja neenakost*

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Dokaz

Izrek dokažemo z matematično indukcijo. Naj bo $x > 0$ *poljuben.*
Najprej pokažemo bazo indukcije.
Za $n = 2$ *je leva stran neenakosti enaka* $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$*,*
desna stran neenakosti pa $1 + 2x$*.*
Ker je $x > 0$*, je tudi* $x^2 > 0$ *in zato* $(1 + x)^2 > 1 + 2x$*.*

Pokažimo še indukcijski korak.
Denimo, da Bernoullijeva neenakost velja za nek n.
Potem velja tudi $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx)$
$= 1 + nx + x + nx^2 > 1 + (n+1)x$,
kjer smo pri prvi neenakosti upoštevali indukcijsko predpostavko, da je $(1+x)^n > 1 + nx$, *pri drugi neenakosti pa, da je* $nx^2 > 0$.
Po matematični indukciji potem sledi, da velja Bernoullijeva neenakost za vsako naravno število $n > 1$.

Trditev

Naj bo c poljubno realno število. Definiramo zaporedje

$$a_n = c^n.$$

Potem je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c^n = \begin{cases} 0 & : |c| < 1 \\ 1 & : c = 1 \end{cases}$$

Za vse ostale vrednosti števila c pa je zaporedje $\{a_n\} = \{c^n\}$ divergentno.

Dokaz

Če je $c > 1$, *potem pišemo* $c = 1 + x$, *kjer je* $x > 0$. *Potem je po Bernoullijevi neenakosti* $c^n = (1 + x)^n > 1 + nx$, *to pa je neomejeno zaporedje, saj gre za vsak pozitiven* x *z naraščajočim* n *število* $1 + nx$ *čez vse meje.Torej je v tem primeru* $\lim_{n\to\infty} c^n = \infty$.
Če je $c = 1$, *je zaporedje* $c^n = 1$ *konstantno in zato konvergentno z limito 1.*
Če je $-1 < c < 1$, *potem definiramo* $b = \left|\frac{1}{c}\right|$. *Ker je* $b > 1$, *je zaporedje* b^n *po prejšnjem neomejeno. Sledi, da je* $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$.

Za $c \leq -1$ *je neskončno členov večjih ali enakih 1 in neskončno členov manjših ali enakih* -1*. Torej v tem primeru zaporedje ni konvergentno.*

Trditev

Naj bo c poljubno pozitivno število. Definiramo zaporedje

$$a_n = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}.$$

Potem je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1.$$

Dokaz

Naj bo $c > 1$. Potem pri izbranem $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, definiramo $x = \frac{c-1}{n} > 0$ in pišemo $c = 1 + nx$.
Po Bernoullijevi neenakosti velja

$$\left(1 + \frac{c-1}{n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{c-1}{n} = c > 1,$$

torej je

$$1 + \frac{c-1}{n} > \sqrt[n]{c} > 1.$$

Ker je limita levega in desnega zaporedja v neenakosti enaka 1, je 1 tudi limita srednjega zaporedja.

Če je $c = 1$, je trditev očitna.
Če pa je $0 < c < 1$, potem definiramo $b = \frac{1}{c} > 1$. Potem je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$ *in zato*

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

Opomba

Zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \sqrt[n]{n}$, je konvergentno in velja

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$