Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

24. oktober 2013

Potence z iracionalnim eksponentom

Naj bo $\frac{a}{b}$ poljubno racionano število, torej $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, in naj bo c poljubno pozitivno realno število. Potem je

$$c^{\frac{a}{b}}$$

dobro definirano realno število. Določimo ga tako, da najprej poiščemo realno število, katerega b-ta potenca je enaka c, nato pa dobljeno število še potenciramo s številom a.

Naj bo sedaj r poljubno realno število in c poljubno pozitivno realno število. Definirali bi radi število c^r.

Primer

Koliko je na primer 2^π?

Ker je množica racionalnih števil gosta v množici realnih števil, za vsako realno število r obstaja zaporedje racionalnih števil $\{q_n\}$, ki konvergirajo k r, torej $r = \lim_{n\to\infty} q_n$.

Zaporedje $\{c^{q_n}\}$ je potem Cauchyevo, saj velja

$$|c^{q_n} - c^{q_{n+k}}| = |c^{q_n}| \cdot |1 - c^{q_{n+k} - q_n}| < \varepsilon,$$

torej prav tako konvergentno. Njegovo limito označimo s

$$c^r = \lim_{n \to \infty} c^{q_n}.$$

Opomba

Limita je neodvisna od izbire zaporedja $\{q_n\}$.

Primer

Število 2^π je po definicij enako

$$2^\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{q_n},$$

kjer za zaporedje $\{q_n\}$ velja $\lim_{n\to\infty} q_n = \pi$. Na primer, za zaporedje racionalnih števil si izberemo zaporedje 3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, ...

Število e

Definirajmo zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ s splošnima členoma

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{in} \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Pokazali bomo, da je zaporedje $\{a_n\}$ naraščajoče in navzgor omejeno, zaporedje $\{b_n\}$ padajoče in navzdol omejeno. Torej sta obe zaporedji konvergentni in imata limito.

Najprej uporabimo varianto Bernoullijeve neenakosti in ocenimo

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Izraz na levi je razlika kvadratov na n-to potenco, torej je

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}.$$

Izraz delimo na obeh straneh z $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ in dobimo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Izraz na levi je ravno n-ti člen, izraz na desni pa $(n-1)$-vi člen zaporedja $\{a_n\}$, torej je

$$a_n > a_{n-1}$$

in zato je zaporedje $\{a_n\}$ naraščajoče.

Podobno, kot smo pokazali, da ocena $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ velja za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, pokažemo, da velja enaka ocena tudi za negativna cela števila. Torej

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, oziroma

$$b_n > b_{n+1}.$$

Dobili smo, da je zaporedje $\{b_n\}$ padajoče.
Ker so vsi členi zaporedja $\{b_n\}$ pozitivni, je zaporedje navzdol omejeno.
Velja

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

torej je

$$b_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Sledi, da je $b_2 > b_{n+1} > a_n$, zato je zaporedje $\{a_n\}$ omejeno navzgor.

Zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ sta torej konvergentni in ker je $b_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, imata isto limito.
Limito označimo z e,

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n},$$

$$\mathrm{e} \doteq 2.7182.$$

Število e je iracionalno.

Primer

Izračunajmo limito

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n}\right)^{(-5n)(-\frac{1}{5}\cdot 2)}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m(-\frac{2}{5})} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}}.$$