Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

5. november 2013

Definicija

Vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

imenujemo geometrijska vrsta.

Če je $q \neq 1$, potem je

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} aq^i = a(1 + q + \ldots + q^n) = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Za $|q| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$, torej je v tem primeru

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a(1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{a}{1 - q}.$$

Za $|q| \geq 1$ je geometrijska vrsta divergentna.

Primer

Izračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^n}.$$

Številska vrsta je definirana kot limita zaporedja delnih vsot, zato lahko tudi za vrsto zapišemo Cauchyev kriterij za konvergenco vrste.
Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentna natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je

$$|s_n - s_{n+k}| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

za vsak $n > n_0$ in vsak $k \in \mathbb{N}$.

Izrek

Potreben, ne pa tudi zadosten, pogoj za konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Torej, če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, potem je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definicija

Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

se imenuje harmonična vrsta.

Trditev

Harmonična vrsta je divergentna.

Dokaz

Pogoj za konvergenco vrste je, da zadošča Cauchyevemu pogoju, torej za vsak $\varepsilon > 0$ mora obstajati neko naravno število n_0, da je vsota poljubnega števila členov, katerih indeks je večji od n_0, manjša od ε.
Naj bo $\varepsilon < \frac{1}{2}$ in n_0 poljubno naravno število.
Ocenimo vsoto

$$\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{2n_0}.$$

Ker je $\frac{1}{n} > \frac{1}{2n_0}$ *za vsak* $n < 2n_0$*, je*

$$\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{2n_0} > \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} + \ldots + \frac{1}{2n_0}$$

$$= n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Torej vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *ne zadošča Cauchyevemu pogoju in zato ni konvergentna.*

Opomba

Pri harmonični vrsti je limita splošnih členov enaka nič, vendar vrsta ni konvergentna.
Torej pogoj $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ res ni zadosten pogoj za konvergenco vrste.

Opomba

Če številski vrsti dodamo ali odvzamemo končno mnogo členov, to na konvergentnost vrste ne vpliva.

Kriteriji za konvergenco vrste

Običajno je vsoto vrste težko izračunati.
Velikokrat nam zadošča že podatek, ali je vrsta konvergentna ali ne.
V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj kriterijev, ki nam povedo, ali je dana številska vrsta kovergentna ali ne.
Najprej bomo obravnavali vrste s pozitivnimi členi, torej vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kjer je $a_n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Izrek (Primerjalni kriterij)

Naj za vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *in* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *velja* $0 < a_n \leq b_n$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$.
Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentna, potem je konvergentna tudi vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentna, potem je divergentna tudi vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dokaz

Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n > n_0$ in $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\varepsilon > b_n + \ldots + b_{n+k} \geq a_n + \ldots + a_{n+k},$$

torej je po Cauchyevem kriteriju konvergentna tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Podobno, če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira, potem obstaja* $\varepsilon > 0$*, da za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *in nek* $k \in \mathbb{N}$ *velja*

$$\varepsilon < a_n + \ldots + a_{n+k} \leq b_n + \ldots + b_{n+k},$$

torej divergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Primer

Preverimo konvergentnost vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}.$$

Izrek (Kvocientni kriterij)

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *taka vrsta, da velja* $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *in naj obstaja*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

- *Če je* $q < 1$, *potem je vrsta konvergentna.*
- *Če je* $q > 1$, *potem je vrsta divergentna.*
- *Če je* $q = 1$, *potem kriterij odpove.*

Dokaz

- *Naj bo* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$.
  Izberemo poljubno število q_0*, tako da je* $q < q_0 < 1$. *Potem obstaja nek* $n_0 \in \mathbb{N}$*, da je* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q_0$ *za vsak* $n \geq n_0$. *Torej je*

$$a_{n_0+k} < q_0 a_{n_0+k-1} < q_0^2 a_{n_0+k-2} < \ldots < q_0^k a_{n_0}$$

  za vsak $k \in \mathbb{N}$. *Ker je* $q_0 < 1$*, je geometrijska vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0} q_0^n$ *konvergentna. Ker končno mnogo členov ne vpliva na konvergenco vrste, je po primerjalnem kriteriju potem konvergentna tudi vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- *Naj bo* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$.
  Podobno kot prej izberemo poljubno število q_0, *tako da je* $1 < q_0 < q$. *Potem obstaja nek* $n_0 \in \mathbb{N}$, *da je* $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q_0$ *za vsak* $n \geq n_0$.
  Na enak način kot prej ocenimo vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *z geometrijsko vrsto* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0} q_0^n$, *ki je divergentna, saj je* $q_0 > 1$.
  Po primerjalnem kriteriju je potem divergentna tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

S kvocientnim kriterijem preverimo konvergentnost naslednjih vrst:

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$$