Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

7. november 2013

Izrek (Korenski kriterij)

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taka vrsta, da velja $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, in naj obstaja

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

- *Če je $q < 1$, potem je vrsta konvergentna.*
- *Če je $q > 1$, potem je vrsta divergentna.*
- *Če je $q = 1$, potem kriterij odpove.*

Skica dokaza

Primer

S pomočjo korenskega kriterija preverimo konvergentnost vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{n^n}.$$

Definicija

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutno konvergentna, če je konvergentna vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je pogojno konvergentna, če je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna. Torej je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ pa divergentna.

Izrek

Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna vrsta.

Skica dokaza

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je po Cauchyevem kriteriju konvergentna, če je*

$$|a_n + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

To pa je res, saj je $|a_n + \ldots + a_{n+k}| \leq |a_n| + \ldots + |a_{n+k}| < \varepsilon$, *pri čemer smo pri drugi oceni upoštevali, da je vrsta absolutno konvergentna.*

Definicija

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je alternirajoča, če je $a_n a_{n+1} < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Izrek (Leibnitzev kriterij)

Če pri alternirajoči vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ njeni členi po absolutni vrednosti padajo proti nič in je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

Primer

Preverimo konvergentnost vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Opomba

Če seštejemo n-členov alternirajoče vrste, katere členi gredo po absolutni vrednosti proti nič, potem se vsota vrste od vsote n členov razlikuje za manj kot a_{n+1}.

Preslikave

Definicija

Preslikava $f : A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu a iz množice A priredi natanko določen element $f(a)$ iz množice B. Pravimo, da je $f(a)$ slika elementa a in pišemo

$$a \mapsto f(a).$$

Množico A imenujemo definicijsko območje ali domena preslikave f, množico $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ pa zaloga vrednosti preslikave f.

Definicija

Graf preslikave f je množica

$$\Gamma(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\}.$$

Primer

Naj bo $A \subset \mathbb{R}^3$ in $B = \mathbb{R}^3$ množica vseh vektorjev. Preslikava f naj bo predpis, ki v nekem trenutku vsaki točki iz območja A priredi vektor hitrosti, ki jo ima posamezna točka v tistem trenutku.

Preslikava $f: A \to B$ je injektivna, če različne elemente $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, preslika v različne elemente množice B, torej $f(a_1) \neq f(a_2)$.
Preslikava $f: A \to B$ je surjektivna, če za vsak element $b \in B$ obstaja tak element $a \in A$, da je b slika elementa a, torej $f(a) = b$.
Preslikava f je bijektivna, če je injektivna in surjektivna.

Definicija

Naj bo $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$. Preslikavo $g \circ f\colon A \to C$, definirano s predpisom

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)),$$

imenujemo kompozitum preslikav g in f.

Realne funkcije ene spremenljivke

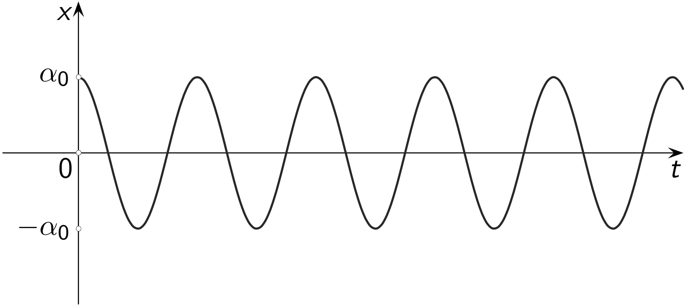
Definicija

Preslikavo $f : D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$, imenujemo realna funkcija ene spremenljivke.

Primer

Nedušeno nihanje matematičnega nihala.

- Opišemo: nihanje nihala dolžine l, ki je bilo na začetku za α_0 odmaknjeno iz ravnovesne lege.
- Grafično: odklon iz ravnovesne lege v odvisnosti od časa



- Funkcijski predpis: $f(t) = \alpha_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)$.

Opomba

Funkcijski predpis večkrat zapišemo tudi v obliki

$$y = f(x),$$

pri čemer x imenujemo neodvisna spremenljivka, y pa odvisna spremenljivka.
Funkcijo označimo s simbolom f, s simbolom $f(x)$ pa vrednost funkcije f v točki x.
Velikokrat je v literaturi funkcija označena kar s simbolom $f(x)$, saj s tem zapisom povemo tudi, od katere neodvisne spremenljivke je funkcija f odvisna.

Dogovor:
Če definicijsko območje funkcije f ni posebej omenjeno, potem je njeno definicijsko območje množica vseh tistih realnih števil, za katere je $f(x)$ realno število.

Primer

Funkcija f je dana s predpisom

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Definicijsko območje D funkcije f je torej po dogovoru $D = [-1, 1]$. To pomeni, $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ in $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.