# Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

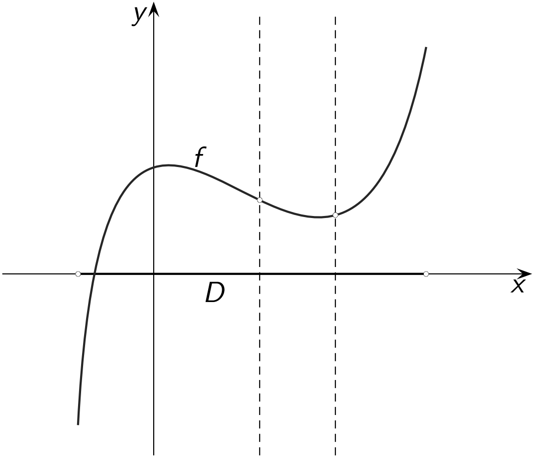
12. november 2013

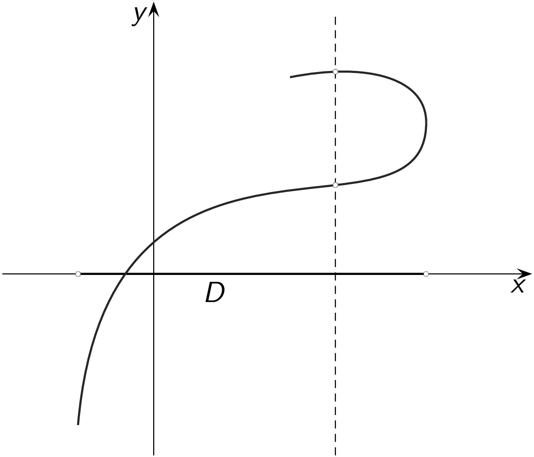
Graf funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je množica

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

torej podmnožica ravnine $\mathbb{R}^2$.
Grafi funkcij, ki jih bomo obravnavali, bodo največkrat krivulje v ravnini.

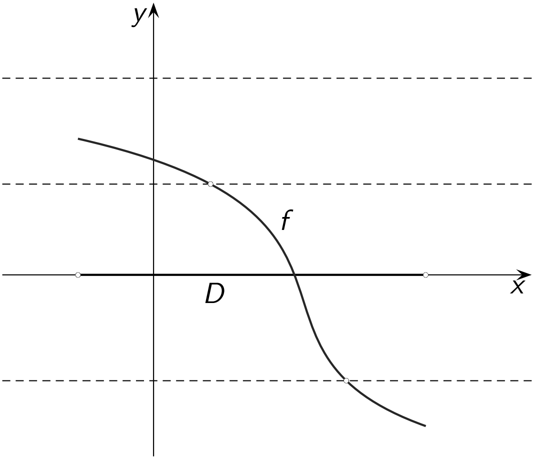
Neka podmnožica ravnine je lahko graf neke funkcije, če vsaka premica, vzporedna z ordinatno osjo, seka to podmnožico v največ eni točki.




y
x
D

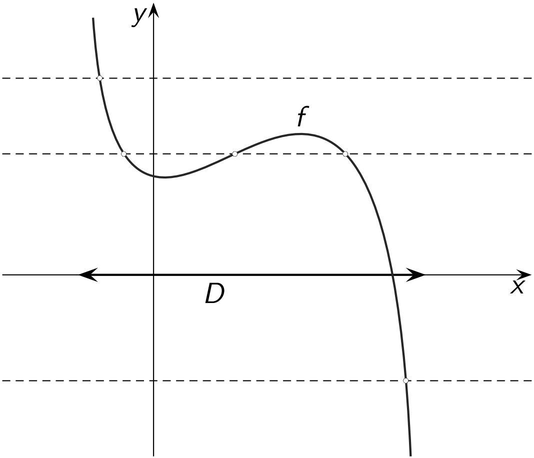
## Trditev

*Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je injektivna, če vsaka premica, vzporedna z abscisno osjo, seka graf funkcije $f$ največ enkrat.*



## Trditev

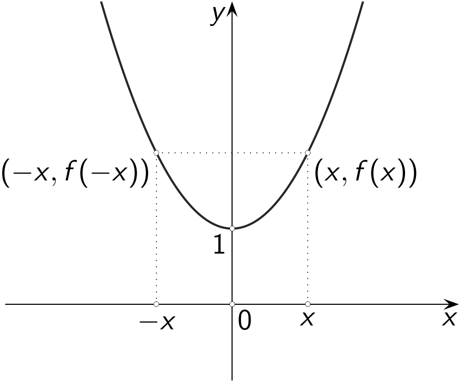
*Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je surjektivna, če vsaka premica, vzporedna z abscisno osjo, seka graf funkcije $f$ vsaj enkrat.*



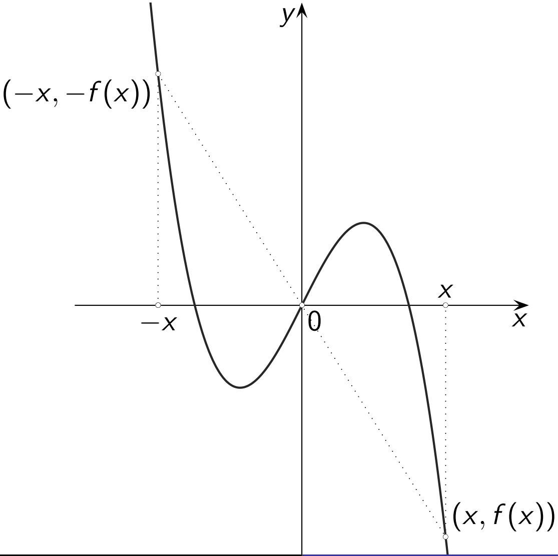
Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je soda, če je

$$f(-x) = f(x)$$

za vsak $x \in D$. Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os.



Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je liha, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in D$. Graf lihe funkcije je simetričen glede na koordinatno izhodišče.



### Opomba

Večina funkcij ni ne lihih in ne sodih.

## Opomba

Podobno kot pri zaporedjih definiramo, kdaj je funkcija naraščajoa, strogo naraščajoča, padajoča, strogo padajoča, monotona, strogo monotona, navzgor omejena, navzdol omejena, omejena.

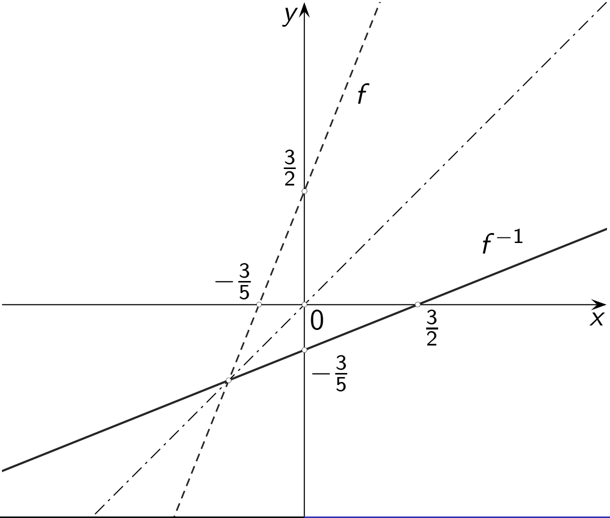
## Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, injektivna funkcija. Potem funkcijo $f^{-1}$, ki slika iz množice $f(D)$ v množico $D$, in za katero velja $f^{-1}(f(x)) = x$ za vsak $x \in D$, imenujemo inverzna funkcija funkcije $f$.

Inverzno funkcijo $f^{-1}$ eksplicitno podane funkcije $f$ izračunamo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk $y = f(x)$, torej $x = f(y)$, in nato izrazimo $y$ kot funkcijo $x$.
Graf inverzne funkcije $f^{-1}$ dobimo tako, da prezrcalimo graf funkcije $f$ prek simetrale lihih kvadrantov.

## Primer

Naj bo funkcija $f$ podana s predpisom $f(x) = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$. Izračunajmo inverzno funkcijo $f^{-1}$.



Naj bosta $f\colon D \to \mathbb{R}$ in $g\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, funkciji, definirani na istem definicijskem območju.
Potem lahko definiramo funkcije

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, kjer je $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in D$.

## Opomba

Ničla funkcije $f$ je vsako tako število $x_0 \in D$, za katero velja, da je $f(x_0) = 0$.

Za funkciji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lahko izračunamo kompozitum $f \circ g$ in $g \circ f$.
V splošnem ta dva kompozituma nista enaka, torej kompozitum funkcij ni komutativna relacija:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

### Primer

Naj bo $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{2}{x}$. Izračunajmo $f \circ g$ in $g \circ f$.

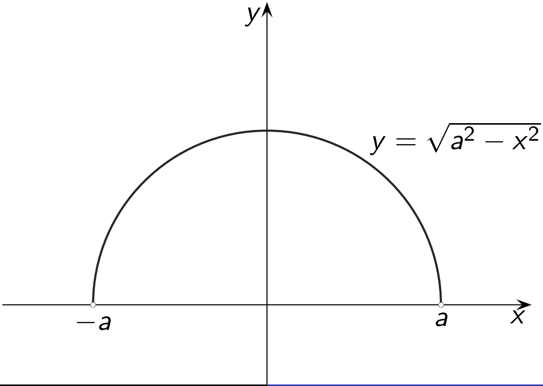
Funkcijski predpis funkcije lahko podamo na več načinov:

- eksplictno, torej $y = f(x)$
- implicitno, torej $F(x, y) = 0$
- parametrično, torej $x = x(t)$, $y = y(t)$

## Primer

Zapišimo funkcijo, katere graf je zgornja polovica krožnice s polmerom $a$:

- $y = \sqrt{a^2 - x^2}$
- $x^2 + y^2 - a^2 = 0$
- $x = a\cos t,\ y = a\sin t$



# Pregled elementarnih funkcij

**Polinom**

Funkcijo oblike

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0.$$

$a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, imenujemo polinom.
Definicijsko območje vsakega polinoma je $\mathbb{R}$.
Polinome ponavadi označimo s črko $p$, torej $f = p$. Število $n$ imenujemo stopnja polinoma $p$.

## Izrek (Osnovni izrek algebre)

*Polinom $p$ stopnje $n$ ima največ $n$ realnih ničel, torej $p(x) = 0$ za največ $n$ različnih realnih vrednosti spremenljivke $x$. Natančneje, polinom $p$ stopnje $n$ ima natanko $n$ kompleksnih ničel. Nekatere ničle so lahko tudi večkratne.*

Če ima polinom $p$ točno $n$ realnih ničel $x_1, \ldots, x_n$, potem lahko polinom $p$ zapišemo v obliki

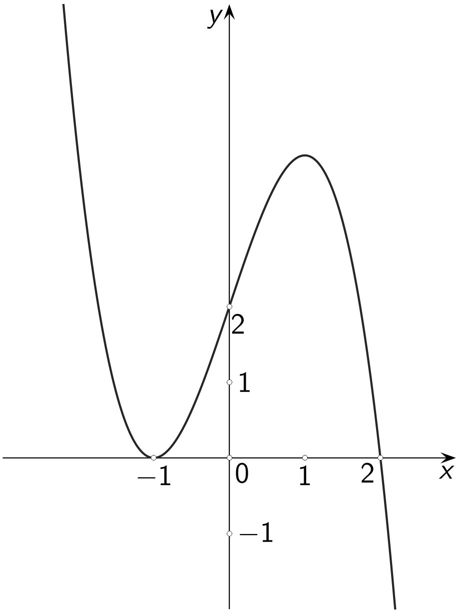
$$p(x) = a_n(x - x_n) \ldots (x - x_1).$$

### Primer

Narišimo polinom

$$p(x) = -x^3 + 3x + 2.$$

Ničle polinoma lahko poskusimo poiskati s Hornerjevim algoritmom.


y
x
2
1
0
−1
−1
1
2

**Racionalna funkcija**

Funkcijo oblike

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta $p$ in $q$ polinoma, imenujemo racionalna funkcija.

Definicijsko območje racionalne funkcije je množica

$$\mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\}.$$

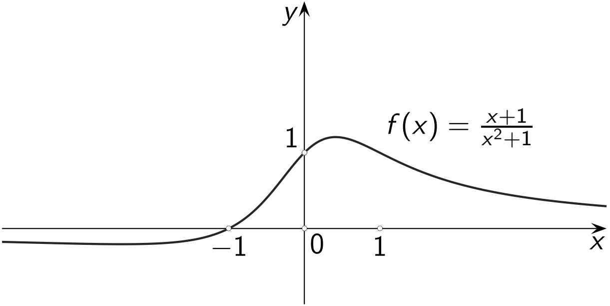
Po osnovnem izreku algebre je števil, kjer racionalna funkcija ni definirna, največ toliko, kot je stopnja polinoma $q$.

Če polinom $q$ nima realnih ničel (na primer, $q(x) = x^2 + 1$), potem je racionalna funkcija definirana za vsako realno število.

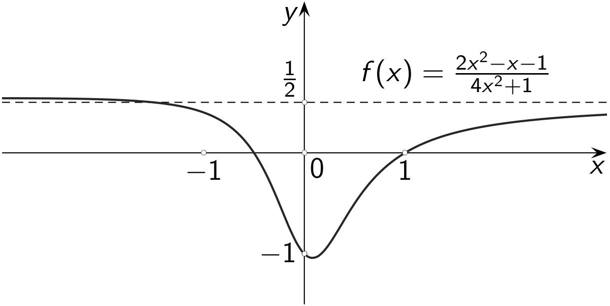
Če za racionalno funkcijo $f = \frac{p}{q}$ polinoma $p$ in $q$ nimata skupnih ničel, potem velja:

- ničle polinoma $p$ so tudi ničle racionalne funkcije $f$,
- ničle polinoma $q$ so poli racionalne funkcije $f$, torej je $f$ v okolici ničel polinoma $q$ neomejena.

Če je stopnja polinoma $p$ manjša od stopnje polinoma $q$, potem ima racionalna funkcija vodoravno asimptoto $y = 0$.



Če sta stopnji polinoma $p$ in $q$ enaki, potem ima racionalna funkcija vodoravno asimptoto.

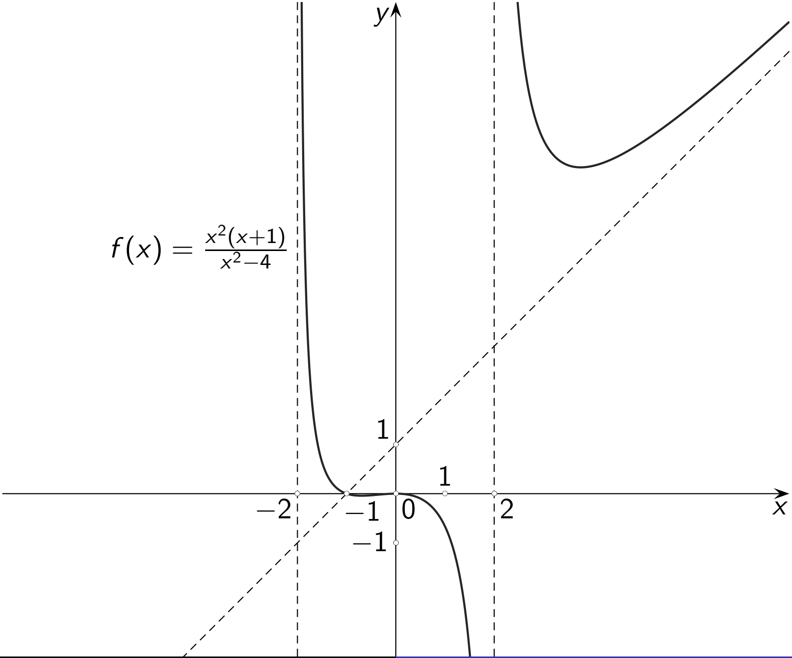


Če je stopnja polinoma $p$ za ena večja od stopnje polinoma $q$, potem ima racionalna funkcija za asimptoto premico.

## Primer

Narisati želimo graf racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2-4}.$$



y
x
$f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2-4}$
1
1
−2
−1
0
2
−1