Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

14. november 2013

Kvadratni koren polinoma

Funkcijo oblike

$$f(x) = \sqrt{p(x)},$$

kjer je p polinom, imenujemo kvadratni koren polinoma p.
Definicijsko območje kvadratnega korena polinoma je množica

$$\{x : p(x) \geq 0\}.$$

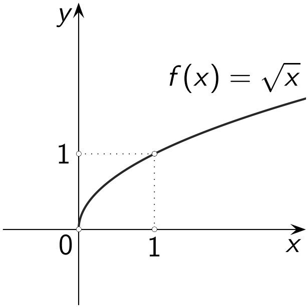
Sem sodijo, poleg drugih, tudi vse funkcije, katerih grafi sestavljajo krivulje drugega reda:

- elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, (vsota razdalj od gorišč je konstantna)
- hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, (razlika razdalj od gorišč je konstantna)
- parabola $y^2 = 2px$ (razdalja od dane premice in od dane točke je konstantna).

Primer

Narisati želimo graf funkcije

$$f(x) = \sqrt{x}.$$



Opomba. Razdalja od premice $x = -\frac{1}{4}$ in od točke $(\frac{1}{4}, 0)$ je enaka.

Eksponentna funkcija

Naj bo $a > 0$ in $a \neq 1$. Potem je

$$f(x) = a^x$$

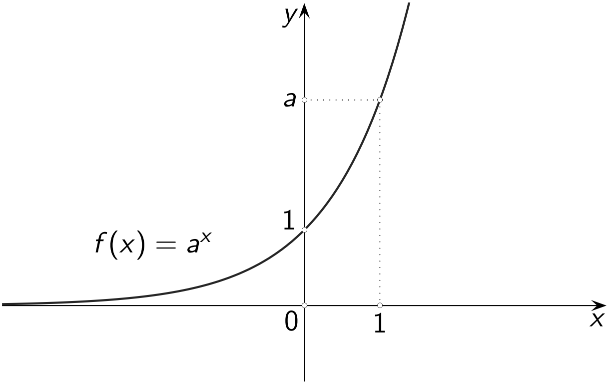
eksponentna funkcija.

Najpogosteje uporabljamo osnovo $a = e$, torej

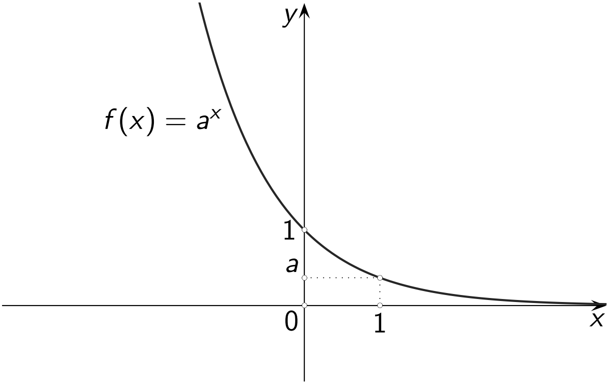
$$f(x) = e^x.$$

Definicijsko območje eksponentne funkcije je množica $\mathbb{R}$.

Za $a > 1$ je $f(x) = a^x$ strogo naraščajoča pozitivna in neomejena funkcija, zaloga vrednosti je množica $(0, \infty)$.



Za $0 < a < 1$ je $f(x) = a^x$ strogo padajoča pozitivna in neomejena funkcija, zaloga vrednosti je množica $(0, \infty)$.



Karakteristična lastnost eksponentne funkcije:

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

torej

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Eksponentna funkcija je strogo monotona, torej obstaja njena inverzna funkcija.

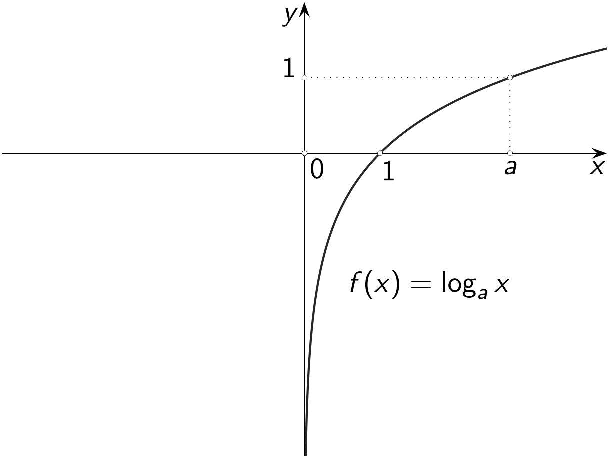
Logaritemska funkcija

Naj bo $a > 0$ in $a \neq 1$. Inverzno funkcijo eksponentne funkcije $x \mapsto a^x$ imenujemo logaritemska funkcija in pišemo

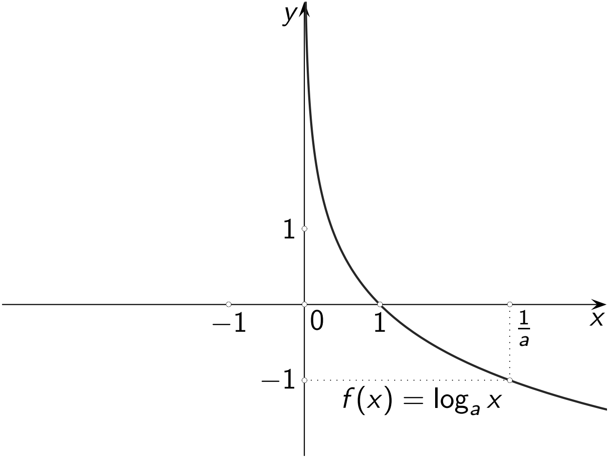
$$f(x) = \log_a(x).$$

Definicijsko območje logaritemske funkcije je enako zalogi vrednosti eksponentne funkcije, torej je enako množici $(0, \infty)$.

Če je $1 < a$, je $f(x) = \log_a x$ strogo naraščajoča neomejena funkcija, zaloga vrednosti je množica $\mathbb{R}$.



Če je $0 < a < 1$, je $f(x) = \log_a x$ strogo padajoča funkcija, zaloga vrednosti je množica $\mathbb{R}$.



Lastnosti logaritemske funkcije:

- logaritemska funkcija je definirana samo za pozitivna realna števila, je strogo monotona in neomejena,
- pol logaritemske funkcije je premica $x = 0$, ničla logaritemske funkcije je $x_0 = 1$, torej $\log_a(1) = 0$,
- če je $y = a^x$, potem je $x = \log_a y$,
- velja $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Največkrat obravnavamo logaritemsko funkcijo z osnovo $a = e$. V tem primeru logaritemsko funkcijo imenujemo naravni logaritem in pišemo

$$f(x) = \log_e x = \log x.$$

Opomba

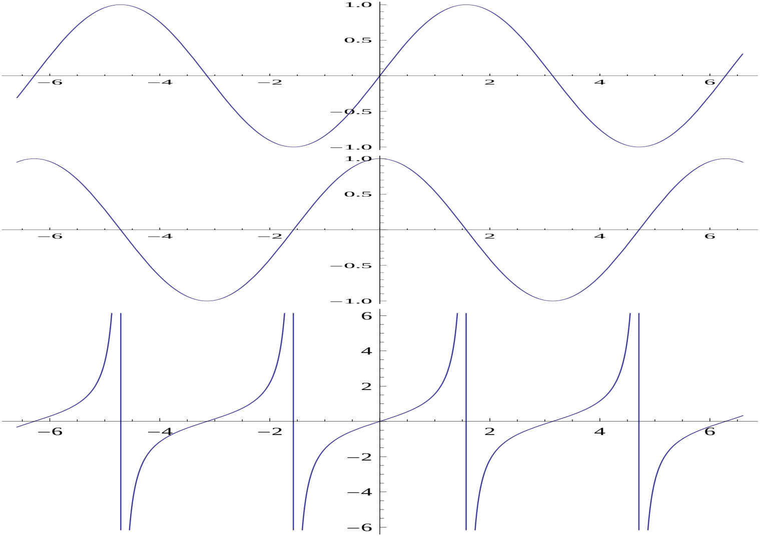
V nekateri literaturi je naravni logaritem zapisan z oznako $\ln x$, z $\log x$ pa je označen desetiški logaritem.

Kotne (trigonometrične) funkcije Kotne funkcije so sinus, kosinus, tangens in kotangens.
Za kote, manjše od $\pi/2$, so definirane s pomočjo razmerij med stranicami v pravokotnem trikotniku.
Definicijsko območje kotnih funkcij sinus in kosinus razširimo na množico vseh realnih števil.
Definicijsko območje funkcije $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ je množica $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Funkciji sinus in kosinus sta periodični s periodo 2π, torej je $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ in $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.
Funkcija tangens je periodična s periodo π, torej je $\tan x = \tan(x + \pi)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.
Med kotnimi funkcijami veljajo številne zveze, na primer:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

Grafi funkcij sinus, kosinus in tangens:

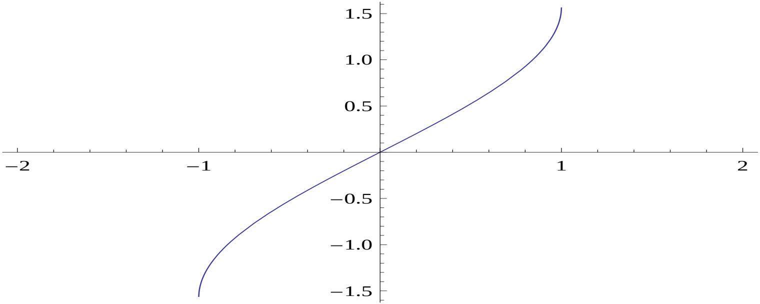


Ciklometrične funkcije Kotne funkcije niso injektivne, zato ne obstaja inverzna funkcija kotne funkcije.
Če pa se omejimo na območje, kjer je posamezna kotna funkcija injektivna, lahko definiramo njen inverz.
Pri sinusni funkciji se omejimo na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, na katerem je sinus injektivna funkcija, zato lahko definiramo inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus sinus in pišemo

$$f(x) = \arcsin x.$$

Torej je $y = \arcsin x$ natanko tedaj, ko je $\sin y = x$.

Definicijsko območje funkcije arkus sinus je $[-1, 1]$, njena zaloga vrednosti pa $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

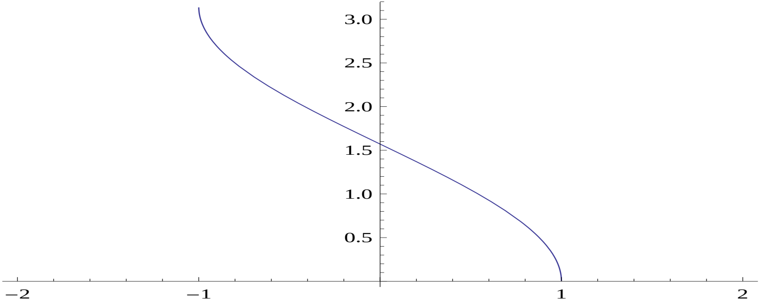


Podobno za kosinus. Omejimo se na interval $[0, \pi]$, na katerem je kosinus injektivna funkcija, in definiramo inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus kosinus in pišemo

$$f(x) = \arccos x.$$

Torej je $y = \arccos x$ natanko tedaj, ko je $\cos y = x$.

Definicijsko območje funkcije arkus kosinus je $[-1, 1]$, njena zaloga vrednosti pa $[0, \pi]$.

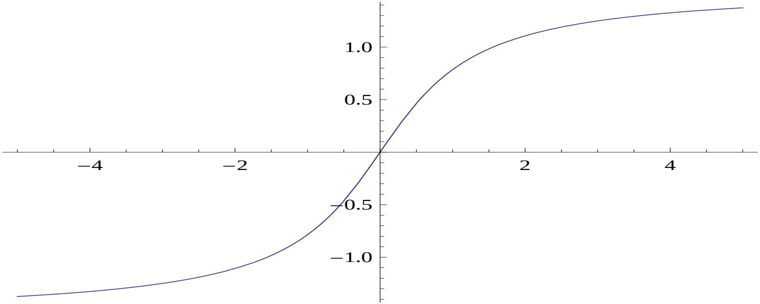


Za funkcijo tangens se omejimo na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, na katerem je tangens injektivna funkcija, in definiramo inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus tangens in pišemo

$$f(x) = \arctan x.$$

Torej je $y = \arctan x$ natanko tedaj, ko je $\tan y = x$.

Definicijsko območje funkcije arkus tangens so vsa realna števila $\mathbb{R}$, njena zaloga vrednosti pa $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



Izpeljimo zvezo med ciklometričnimi funkcijami.
Ker je

$$\cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y) = x,$$

je $y = \arccos x$ in $\frac{\pi}{2} - y = \arcsin x$.
Seštejemo obe enačbi in dobimo

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$