Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

28. november 2013

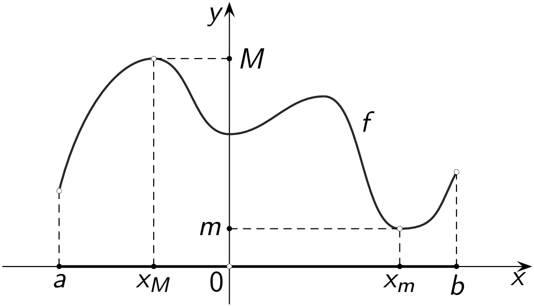
Trditev

Zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *na intervalu* $[a, b]$ *doseže svojo natančno zgornjo mejo in svojo natančno spodnjo mejo. Torej obstajata* $x_m, x_M \in [a, b]$, *tako da je*

$$f(x_m) = inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

in

$$f(x_M) = sup_{x \in [a,b]} f(x).$$


y
M
f
m
a
x_M
0
x_m
b
x

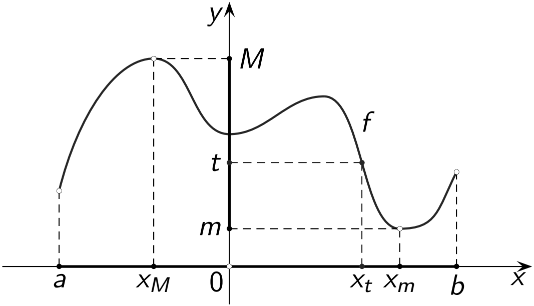
Dokaz

Zvezna funkcija je na zaprtem intervalu omejena, zato obstajata njena natančna spodnja meja m *in natančna zgornja meja* M. *Denimo, da ne obstaja tako število* x_m, *da je* $f(x_m) = m$. *Potem je* $f(x) \neq m$ *za vsak* $x \in [a, b]$. *Potem pa je funkcija* $g(x) = \frac{1}{f(x)-m} > 0$ *zvezna in zato omejena na* $[a, b]$.
Naj bo M_g *natančna zgornja meja funkcije* g. *Potem je* $g(x) = \frac{1}{f(x)-m} \leq M_g$ *in zato* $f(x) \geq m + \frac{1}{M_g}$, *protislovje.*
Podobno dokažemo obstoj x_M.

Trditev

Zvezna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *na intervalu* $[a,b]$ *zavzame vsako vrednost med svojo natančno spodnjo mejo* m *in svojo natančno zgornjo mejo* M*.*
Torej za vsak $t \in [m,M]$ *obstaja nek* $x_t \in [a,b]$*, tako da je*

$$f(x_t) = t.$$


y
M
f
t
m
a
x_M
0
x_t
x_m
b
x

Dokaz

Naj bo $t \in (m, M)$. *Definiramo funkcijo* $g(x) = f(x) - t$ *na intervalu s krajiščima* x_m *in* x_M.
Potem je $g(x_m)g(x_M) < 0$, *zato obstaja točka* x_t, *tako da je* $g(x_t) = 0$, *torej* $f(x_t) = t$.

Definicija

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, D interval. Funkcija f je enakomerno zvezna na D, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

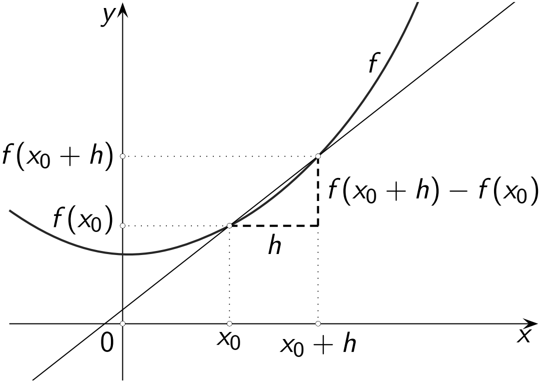
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

za vsaki števili $x, y \in D$, za kateri velja $|x - y| < \delta$.

Odvod

Pri proučevanju funkcij nas običajno zanima, kako se funkcija spreminja, ali njene vrednosti naraščajo, padajo, kako hitre so te spremembe, ...
Kako hitro se vrednosti funkcije $f(x)$ spreminjajo v odvisnosti od spremenljivke x, lahko preverimo s pomočjo odvoda.

Naj bo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$. Ko se vrednost spremenljikve x_0 poveča za h na $x_0 + h$, se vrednost funkcije spremeni za $f(x_0 + h) - f(x_0)$.
Funkcija se tem hitreje spreminja, čim večja je sprememba vrednosti funkcije pri čim manjši spremembi neodvisne spremenljivke, torej čim več je $f(x_0 + h) - f(x_0)$ pri čim manjši spremembi spremenljivke $x_0 + h - x_0 = h$.


y
f
$f(x_0+h)$
$f(x_0+h)-f(x_0)$
$f(x_0)$
h
0
x_0
x_0+h
x

Hitrost spreminjanja nam pove kvocient

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

ki se imenuje diferenčni kvocient funkcije f v točki x_0.
Diferenčni kvocient je enak smernemu koeficientu premice skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0+h, f(x_0+h))$.

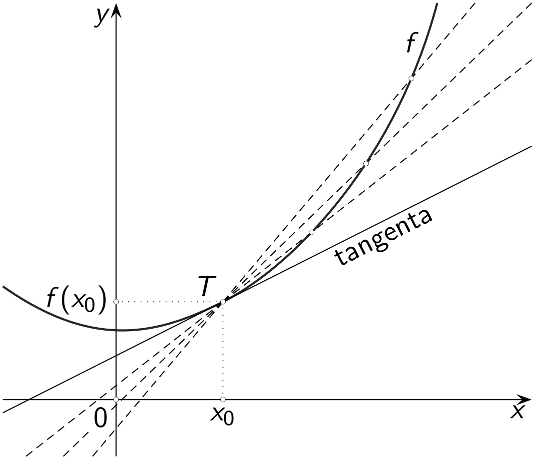
Definicija

Naj bo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$. Če obstaja limita diferenčnega kvocienta funkcije f v točki $x_0 \in (a, b)$, ko gre h proti nič, potem pravimo, da je funkcija f odvedljiva v točki x_0. Vrednost te limite imenujemo odvod funkcije f v točki x_0 in ga označimo $f'(x_0)$. Torej je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definicija

Premico skozi točko $(x_0, f(x_0))$ s smernim koeficientom $f'(x_0)$ imenujemo tangenta na graf funkcije $y = f(x)$ v točki $(x_0, f(x_0))$.



Definicija

Funkcija f je odvedljiva v točki x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$$

za vsak $h \neq 0$, za katerega velja $|h| < \delta$.

Če je f odvedljiva v vsaki točki območja D, potem pravimo, da je f odvedljiva na območju D.

Primer

Izračunajmo po definiciji odvod funkcije $f(x) = x^2 + x$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + x + h - x^2 - x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + h}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h + 1) = 2x + 1.
\end{aligned}
$$