Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

3. december 2013

Pravila za odvajanje

- Če je f konstantna funkcija, potem je njen odvod enak nič, torej $c' = 0$.
- Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x, potem je v tej točki odvedljiva tudi funkcija $f + g$ in velja $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x, potem je v točki x odvedljiva tudi funkcija fg in velja $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

- Če je funkcija f odvedljiva v točki x in c konstanta, potem je v točki x odvedljiva tudi funkcija cf in velja $(cf)'(x) = cf'(x)$.
- Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x in je $g(x) \neq 0$, potem je v točki x odvedljiva tudi funkcija $\frac{f}{g}$ in velja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

- Če je funkcija f odvedljiva v točki $g(x)$ in je funkcija g odvedljiva v točki x, potem je funkcija $f \circ g$ odvedljiva v točki x in velja

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x))' = f'(g(x))g'(x).$$

(posredno odvajanje, verižno pravilo)

- Če je f^{-1} inverzna funkcija funkcije f in je $f'(x) \neq 0$, potem je funkcija f^{-1} odvedljiva v točki $f(x)$ in velja

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Odvodi elementarnih funkcij

Odvod eksponentne funkcije $f(x) = e^x$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $t = e^h - 1$.

Potem je $h = \log(t+1)$ in ko gre h proti 0, gre tudi $t = e^h - 1$ proti 0.

Torej je $f'(x) = e^x \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log(t+1)} = e^x \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}\log(t+1)}$

$= e^x \lim_{t\to 0} \frac{1}{\log(t+1)^{\frac{1}{t}}} = e^x \frac{1}{\log(\lim_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}})}$

$= e^x \frac{1}{\log e} = e^x.$

Naj bo $f(x) = a^x$.
Potem zapišemo

$$f(x) = a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

in po pravilu za posredno odvajanje dobimo

$$f'(x) = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

Odvod logaritemske funkcije $f(x) = \log x$.
Inverzna funkcija logaritemske funkcije je eksponentna funkcija $f^{-1}(x) = e^x$, zato je

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

Če je $f(x) = \log_a x$, potem je

$$f'(x) = (\log_a(x))' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{x \log a}.$$

Odvod potenčne funkcije $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$.
Zapišemo

$$f(x) = x^r = e^{\log x^r} = e^{r \log x}$$

in odvajamo po pravilu za posredno odvajanje

$$f'(x) = (e^{r \log x})' = e^{r \log x} r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = rx^{r-1}.$$

Odvod kotne funkcije $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(\frac{2x+h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos(x + \frac{h}{2})\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \cos x.$$

Podobno dobimo, da je odvod kotne funkcije $f(x) = \cos x$ enak $f'(x) = -\sin x$.

Odvod kotne funkcije $f(x) = \tan x$.
Funkcijo $\tan x$ zapišemo kot kvocient

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

in jo odvajamo po pravilu za odvod kvocienta

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\cos x)^2}.$$

Odvodi elementarnih funkcij

Odvod ciklometrične funkcije $f(x) = \arcsin x$.
Ker je $f^{-1}(x) = \sin x$
in
$(f^{-1})'(x) = \cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$,
po pravilu za odvod inverzne funkcije dobimo
$f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2}}$
$= \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Odvod ciklometrične funkcije $f(x) = \arccos x$ dobimo najhitreje, če na obeh straneh odvajamo enakost

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Sledi

$$f'(x) = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Odvod ciklometrične funkcije $f(x) = \arctan x$.
Ker je $f^{-1}(x) = \tan x$
in
$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{(\cos x)^2} = \dfrac{(\sin x)^2 + (\cos x)^2}{(\cos x)^2}$
$= 1 + (\tan x)^2$, je
$f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \dfrac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2}$
$= \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Odvod hiperbolične funkcije $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ izračunamo s pomočjo pravil za odvajanje vsote.
Tako je

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Podobno dobimo, da je $(\cosh x)' = \sinh x$ in $\tanh x = \dfrac{1}{(\cosh x)^2}$.

Tabela odvodov nekaterih elementarnih funkcij

$c' = 0$

$(x^r)' = rx^{r-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \log a$

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\tan x)' &= \frac{1}{(\cos x)^2} \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$