Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

5. december 2013

Primer

Odvajajmo funkcijo $f(x) = x^x$.

Diferencial funkcije

Spomnimo se, da je funkcija f odvedljiva v točki x, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon$$

za vsak $h \neq 0$, za katerega velja $|h| < \delta$.
Označimo

$$\eta = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x).$$

Potem velja $\eta \to 0$, ko gre $h \to 0$.

Obe strani enakosti pomnožimo s h in dobimo

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \eta h.$$

Označimo spremembo funkcije f z $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ in spremembo spremenljivke x z $\Delta x = h$.
Torej je

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \eta \Delta x.$$

Izraz $f'(x)\Delta x$ imenujemo diferencial funkcije f in ga označimo z $df = f'(x)\Delta x$.
Če je $f(x) = x$, dobimo, da je $df = dx = 1\Delta x$ in zato

$$df = f'(x)dx$$

oziroma

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Ker gre $\eta \to 0$, ko gre $h \to 0$, je izraz ηh majhen v primerjavi z $f'(x)h$ za majhne vrednosti h.
Torej je

$$f(x+h) - f(x) \doteq f'(x)h,$$

oziroma

$$f(x+h) \doteq f(x) + f'(x)h.$$

Primer

S pomočjo diferenciala približno določite vrednost $\cos 151^\circ$.
Uporabili bomo formulo $f(x+h) \doteq f(x) + f'(x)h$.
Za kot $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$ poznamo vrednosti kotnih funkcij. Zato vzamemo za $x = \frac{5\pi}{6}$ in za $h = \Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$.
Torej je

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \doteq \cos\frac{5\pi}{6} + \left(-\sin\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180}.$$

Sledi

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right) \doteq -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180} = -0.87475.$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right) = -0.87462.$$

Višji odvodi nekaterih elementarnih funkcij

- $f(x) = e^x$
  $f^{(n)}(x) = e^x$
- $f(x) = x^n$
  $f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$
  $f^{(n)}(x) = n!$
  $f^{(m)}(x) = 0,\ m > n$
- $f(x) = \sin x$
  $f'(x) = \cos x$
  $f''(x) = -\sin x$
  $f'''(x) = -\cos x$
  $f^{(4)}(x) = \sin x$

Lastnosti odvedljivih funkcij

Oglejmo si nekaj osnovnih izrekov o odvedljivih funkcijah, ki jih uporabljamo pri proučevanju lastnosti funkcij.

Izrek

Če je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $x_0 \in (a, b)$, potem je v točki x_0 tudi zvezna.

Dokaz

Funkcija f je odvedljiva v točki x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)| < \varepsilon$$

za vsak $h \neq 0$, za katerega velja $|h| < \delta$.
Torej je

$$|f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)| < \varepsilon|h|.$$

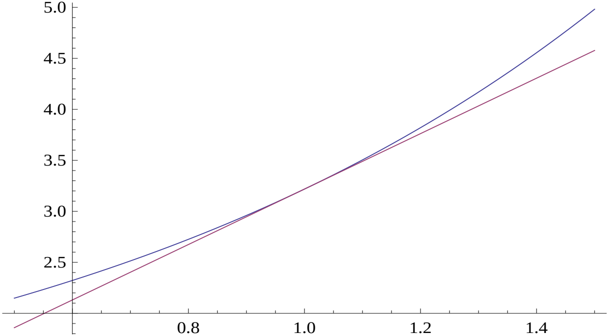
Izrek

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *odvedljiva funkcija in naj bo* $f'(x_0) > 0$, $x_0 \in (a, b)$. *Potem je funkcija* f *v točki* x_0 *naraščajoča. Če je* $f'(x_0) < 0$, $x_0 \in (a, b)$, *potem je funkcija* f *v točki* x_0 *padajoča.*

Dokaz

Naj bo $f'(x_0) > 0$.

Potem je smerni koeficient tangente na graf funkcije f *v točki* x_0 *pozitiven, torej tangenta, ki najbolje aproksimira funkcijo v točki* x_0*, narašča.*



Natančneje. Označimo

$$\eta = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0).$$

Ker je f odvedljiva v točki x_0, *velja* $\eta \to 0$, *ko gre* $h \to 0$.
Torej je

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h(f'(x_0) + \eta).$$

Za dovolj majhen h je $|\eta| < f'(x_0)$, *torej je* $f'(x_0) + \eta > 0$.

Če je $|h|$ majhno število, je

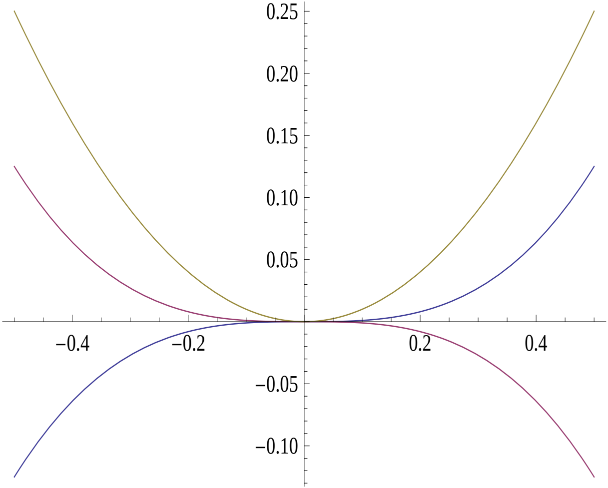
$$f(x_0+h)-f(x_0)>0, \quad za\ h>0,$$

in

$$f(x_0+h)-f(x_0)<0, \quad za\ h<0.$$

Dokazali smo, da je v primeru, ko je $f'(x_0)>0$, funkcija f v točki x_0 naraščajoča.
Podobno pokažemo, da je v primeru, ko je $f'(x_0)<0$, funkcija f v točki x_0 padajoča.

Kaj lahko povemo o obnašanju odvedljive funkcije v okolici točke x_0, za katero velja, da je $f'(x_0) = 0$?



Definicija

Če za odvedljivo funkcijo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ velja, da je $f'(x_0) = 0$ za $x_0 \in (a,b)$, potem pravimo, da je x_0 stacionarna točka funkcije f.

Tangenta na graf funkcije v stacionarni točki je vzporedna abscisni osi.

Definicija

Funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ima v točki $x_0 \in (a,b)$ lokalni minimum, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ za vsak $|h| < \delta$.

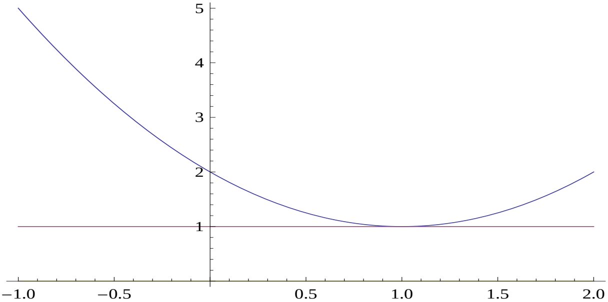
Funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ima v točki $x_0 \in (a,b)$ lokalni maksimum, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$ za vsak $|h| < \delta$.
Če ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum ali lokalni maksimum, potem pravimo, da ima v točki x_0 lokalni ekstrem.

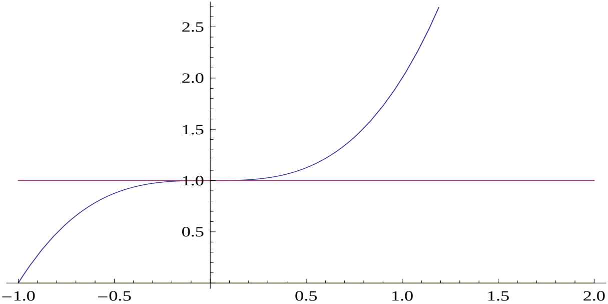
Izrek (Fermatov izrek)

Če ima odvedljiva funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *v točki* $x_0 \in (a, b)$ *lokalni ekstrem, potem je* $f'(x_0) = 0$*, torej je v točki* x_0 *stacionarna točka.*

Opomba

Obratno ni nujno res, na primer, $f(x) = x^3 + 1$ ima v točki $x_0 = 0$ stacionarno točko, vendar funkcija f v tej točki nima lokalnega ekstrema.


5
4
3
2
1
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5
2.0


2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5
2.0

Dokaz

Denimo, da ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum. To pomeni, da za majhne vrednosti h velja $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$.
Torej je

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

in

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Ker je f v točki x_0 odvedljiva, torej obstaja limita diferenčnega kvocienta, morata biti leva in desna limita enaki.
To pa pomeni, da sta leva in desna limita enaki 0, torej $f'(x_0) = 0$.

Na enak način dokažemo izrek, če je v x_0 lokalni maksimum.