Matematika 1

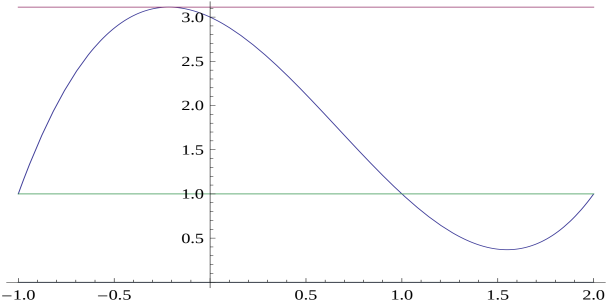
Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

10. december 2013

Izrek (Rolleov izrek)

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in naj bo $f(a) = f(b)$. Potem obstaja vsaj ena točka $x_0 \in (a, b)$, tako da je $f'(x_0) = 0$.



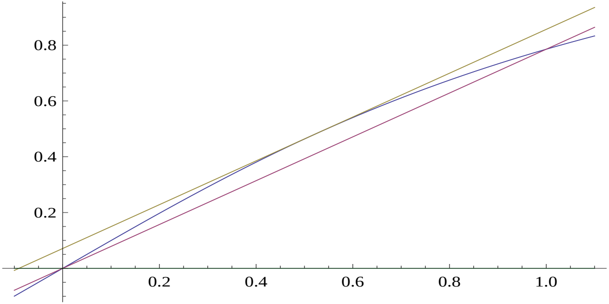
Dokaz

Vsaka odvedljiva funkcija je tudi zvezna, zvezna funkcija pa na zaprtem intervalu zavzame svoj minimum $f(x_m) = m$ in svoj maksimum $f(x_M) = M$.
Če je $m = M$, je funkcija f konstantna in zato $f'(x) = 0$ za vsak $x \in [a, b]$.
Če pa je $m < M$, potem je $x_m \neq x_M$ in zato vsaj eno izmed števil x_m, x_M leži na intervalu (a, b), saj je $f(a) = f(b)$. Označimo to število z $x_0 \in (a, b)$. Odvedljiva funkcija f ima potem v točki x_0 lokalni ekstrem in zato je po Fermatovem izreku $f'(x_0) = 0$.

Izrek (Lagrangeov izrek)

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Potem obstaja vsaj ena točka $x_0 \in (a, b)$, tako da je

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Dokaz

Definiramo funkcijo

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ker je f odvedljiva funkcija, je tudi g odvedljiva funkcija.

Izračunamo $g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$

in

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= f(b) - f(b) + f(a) = f(a). \end{aligned}$$

Torej ima funkcija g *v krajiščih intervala* $[a, b]$ *enake vrdnosti in zato po Rollovem izreku obstaja* $x_0 \in (a, b)$*, tako da je* $g'(x_0) = 0$*. Ker je*

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

in

$$g'(x_0) = 0,$$

je

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Izrek

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *odvedljiva funkcija in naj bo* $f'(x) = 0$ *za vsak* $x \in [a, b]$*. Potem je* f *konstantna funkcija.*

Dokaz

Naj bo $x \in [a, b]$ *poljuben. Za funkcijo* f *na intervalu* $[x, b]$ *uporabimo Lagarangeov izrek, torej obstaja tak* $x_0 \in (x, b)$*, da je* $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$.
Ker je $f'(x_0) = 0$*, je* $f(x) = f(b)$ *za vsak* $x \in [a, b]$*, torej je* f *konstantna funkcija.*

Izrek

Naj bosta funkciji $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *odvedljivi in naj bo* $f'(x) = g'(x)$ *za vsak* $x \in [a,b]$. *Potem obstaja konstanta* $c \in \mathbb{R}$, *tako da je* $f(x) = g(x) + c$.

Dokaz

Definiramo funkcijo $h(x) = f(x) - g(x)$. *Potem je* $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ *za vsak* $x \in [a,b]$. *Po prejšnjem izreku je* h *konstantna funkcija, torej je* $h(x) = c$ *oziroma* $f(x) = g(x) + c$ *za vsak* $x \in [a,b]$.

Ekstremi funkcij

Vemo, da za odvedljivo funkcijo f, ki ima v točki x_0 ekstrem, velja, da je x_0 njena stacionarna točka. Da je torej $f'(x_0) = 0$.
Pokazali smo tudi, da to ni zadosten pogoj za nastop ekstrema.
V nadaljevanju bomo zapisali izreka, ki nam povesta, kdaj ima odvedljiva funkcija v stacionarni točki ekstrem.

Izrek

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *odvedljiva funkcija in* $x_0 \in (a, b)$ *stacionarna točka funkcije* f.
Če prvi odvod funkcije f *v stacionarni točki* x_0 *spremeni predznak, potem ima funkcija* f *v* x_0 *lokalni ekstrem.*
Če ima prvi odvod funkcije f *povsod v okolici stacionarne točke* x_0*, razen v* x_0*, isti predznak, potem funkcija* f *v* x_0 *nima lokalnega ekstrema.*

Dokaz

Naj bo x_0 *stacionarna točka in naj obstaja tak* $\delta > 0$*, da je* $f'(x) < 0$ *za vsak* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *in* $f'(x) > 0$ *za vsak* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$*.*
Potem je funkcija f *na intervalu* $(x_0 - \delta, x_0)$ *padajoča in na intervalu* $(x_0, x_0 + \delta)$ *naraščajoča. Torej je v* x_0 *lokalni minimum.*
Podoben razmislek velja za lokalni maksimum.

Če pa obstaja tak $\delta > 0$*, da je da je* $f'(x) < 0$ *za vsak* $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$*, potem je funkcija* f *levo in desno od stacionarne točke padajoča.*
Podobno, če je $f'(x) > 0$ *za vsak* $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$*, potem je funkcija* f *levo in desno od stacionarne točke naraščajoča.*
Torej v tem primeru funkcija f *v stacionarni točki nima lokalnega ekstrema.*

Definicija

Funkcija f je konveksna na intervalu $[a, b]$, če za vsak $[c, d] \subseteq [a, b]$ in vsak $x \in [c, d]$ velja

$$f(x) \leq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c).$$

Torej graf funkcije f na intervalu $[c, d]$ leži pod premico skozi točki $(c, f(c))$, $(d, f(d))$.

Definicija

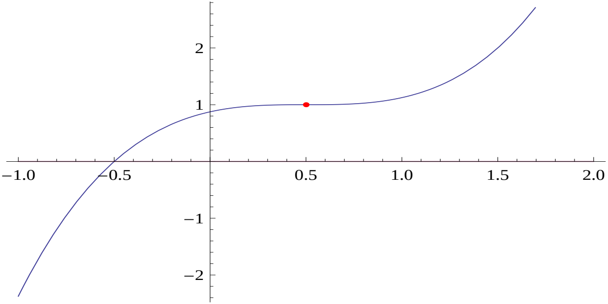
Funkcija f je konkavna na intervalu $[a, b]$, če za vsak $[c, d] \subseteq [a, b]$ in vsak $x \in [c, d]$ velja

$$f(x) \geq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c).$$

Torej graf funkcije f na intervalu $[c, d]$ leži nad premico skozi točki $(c, f(c))$, $(d, f(d))$.

Definicija

Točka x_0 je prevoj funkcije f, če se v točki x_0 funkcija f spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno.



Izrek

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dvakrat odvedljiva funkcija.*
Če je $f''(x) > 0$ *za vsak* $x \in (a, b)$*, potem je* f *konveksna na intervalu* $[a, b]$*.*
Če je $f''(x) < 0$ *za vsak* $x \in (a, b)$*, potem je* f *konkavna na intervalu* $[a, b]$*.*
Če je $f''(x_0) = 0$ *in drugi odvod pri prehodi skozi točko* x_0 *spremeni predznak, je* x_0 *prevoj funkcije* f*.*

Izrek

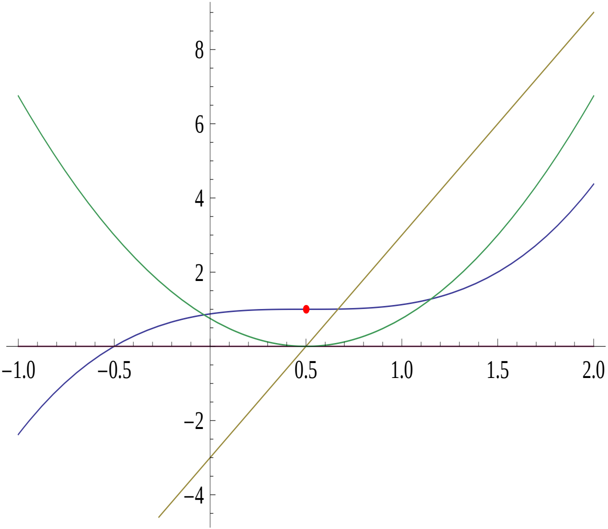
Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dvakrat odvedljiva funkcija in naj bo* $x_0 \in (a, b)$ *stacionarna točka funkcije* f*.*
Če je $f''(x_0) > 0$*, potem je v stacionarni točki* x_0 *lokalni minimum.*
Če je $f''(x_0) < 0$*, potem je v stacionarni točki lokalni maksimum.*

Dokaz

Denimo, da je $f''(x_0) > 0$. *Potem je* $f'(x)$ *naraščajoča funkcija in ker je* $f'(x_0) = 0$, *levo od* x_0 *velja* $f'(x) < 0$, *desno od* x_0 *pa velja* $f'(x) > 0$.

Torej prvi odvod v stacionarni točki spremeni predznak iz negativnega v pozitivnega, zato je v x_0 *lokalni minimum.*

Podobno za lokalni maksimum.


8
6
4
2
−2
−4
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5
2.0

Ekstrem zvezne funkcije na zaprtem intervalu

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$. Potem smo pokazali, da funkcija f na tem intervalu zavzame največjo in najmanjšo vrednost. Če je funkcija odvedljiva, je točka, v kateri je ekstrem, stacionarna točka.
Lahko pa je ekstrem tudi v krajiščih intervala ali tam, kjer funkcija sploh ni odvedljiva.

Primer

Določimo vse ekstreme funkcije

$$f(x) = (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 2).$$

Stacionarne točke so: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -1$.

Primer

Metoda najmanjših kvadratov:

$$f(x) = (x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$$

$$x = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

L'Hospitalovo pravilo

Lahko se zgodi, da funkcija f v neki točki x_0 ni definirana, kljub temu pa obstaja limita funkcije f v točki x_0.
Če definiramo vrednost funkcije f v točki x_0 s predpisom $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, potem pravimo, da smo odpravili nedoločenost funkcije f v točki x_0.

Pri odpravljanju nedoločenosti v točki x_0 funkcije f, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)},$$

pri čemer je $u(x_0) = v(x_0) = 0$, si pomagamo z L'Hospitalovim pravilom.

Izrek (L'Hospitalov izrek)

Naj bosta funkciji u in v odvedljivi v okolici točke a in naj bo $u(a) = v(a) = 0$. V tej okolici naj za $x \neq a$ velja $v(x) \neq 0$ in $v'(x) \neq 0$.
Če obstaja $\lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, potem obstaja tudi $\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)}$ in velja

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Dokaz

Naj bo $x > a$ element dovolj majhne okolice števila a. Označimo $k = \frac{u(x)}{v(x)}$ in definiramo funkcijo

$$g(t) = u(t) - kv(t)$$

za vsak $t \in [a, x]$.
Potem je $g(a) = u(a) - kv(a) = 0$ in $g(x) = u(x) - kv(x) = 0$.
Funkcija g zadošča na intervalu $[a, x]$ pogojem Rollovega izreka, zato obstaja taka točka $x_0 \in (a, x)$, da je $g'(x_0) = 0$.

Ker je $g'(t) = u'(t) - kv'(t)$ *in* $g'(x_0) = 0$, *sledi, da je* $u'(x_0) - kv'(x_0) = 0$, *in zato*

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}.$$

Ko gre $x \to a$, *gre tudi* $x_0 \to a$ *in v limiti dobimo željeno enakost.*

Primer

Izračunajmo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \quad \text{in} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$