Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

12. december 2013

Izrek

Naj bosta funkciji u in v odvedljivi v okolici točke a in naj bo $\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} v(x) = \infty$.
Če obstaja končna ali neskončna limita: $\lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, *potem obstaja tudi končna ali neskončna limita:* $\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)}$ *in velja*

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Dokaz opustimo.

Primer

Izračunajmo

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x}.$$

Doslej smo si ogledali, kako odpravimo nedoločenost oblike $\frac{0}{0}$ in $\frac{\infty}{\infty}$. Nedoločenost oblike $0 \cdot \infty$ ali $\infty - \infty$ odpravimo tako, da izraz preoblikujemo v enega izmed prej naštetih dveh.

Primer

Izračunajmo

$$\lim_{x \to 0} x^2 \log x, \quad \lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} \quad \text{in} \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

Nedoločeni integral

Doslej smo za dano odvedljivo funkcijo f znali poiskati njen odvod f'.

Sedaj pa se za dano funkcijo f vprašamo, katero funkcijo moramo odvajati, da bi dobili f.

Definicija

Naj bo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Funkcijo $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, za katero velja, da je

$$F'(x) = f(x)$$

za vsak $x \in (a, b)$, imenujemo nedoločeni integral funkcije f in pišemo

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Izrek

Če je funkcija F nedoločeni integral funkcije f, potem je tudi funkcija $F + C$ nedoločeni integral funkcije f za poljubno konstanto C.
Še več, vsak nedoločeni integral funkcije f je potem take oblike.

Dokaz

Če je $F'(x) = f(x)$, potem je tudi $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.
Če je funkcija F nedoločeni integral funkcije f, potem je $F'(x) = f(x)$ in vsaka druga funkcija, ki ima isti odvod kot funkcija F, torej f, je potem po izreku enaka $F + C$.

Tabela integralov nekaterih elementarnih funkcij

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$

Tabela integralov nekaterih elementarnih funkcij

- $$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C$$
- $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$
- $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$
- $$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

Pravila za integriranje

Pravila za integriranje izpeljemo iz pravil za odvajanje.

- $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$
- Vpeljava nove spremenljivke.
  Če obstaja $\int f(x)dx$ in je x odvedljiva funkcija parametra t, potem obstaja tudi $\int f(x(t))x'(t)dt$ in velja
  $$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt.$$

- Integracija po delih (per partes).
  Če obstaja eden izmed integralov $\int f(x)g'(x)dx$ in $\int f'(x)g(x)dx$, potem obstaja tudi drugi in velja
  $$\int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x).$$
  To pravilo običajno zapišemo v obliki $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu$.

Primeri:

- $\int (x+2)^2(x-1)^2 dx$
- $\int (2x-3)^{21} dx$
- $\int \frac{1}{x^2+9} dx$
- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx$
- $\int \tan x dx$