Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

17. december 2013

- $\int x \log x dx$
- $\int \log x dx$
- $\int x^2 e^x dx$
- $\int (x+1) \sin x dx$
- $\int e^x \cos x dx$

Integral racionalne funkcije

Izračunati želimo integral

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx,$$

kjer sta p in q polinoma.

Če je stopnja polinoma p večja ali enaka stopnji polinoma q, potem polinom p delimo s polinomom q in dobimo $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$, torej je

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left(k(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right) dx,$$

pri čemer je stopnja polinoma r manjša od stopnje polinoma q. Integral $\int k(x)dx$ znamo izračunati, v integralu $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$ pa je stopnja polinoma v števcu manjša od stopnje polinoma v imenovalcu.

Za polinom q poiščemo vse njegove ničle, tako realne kot tudi kompleksne, in nato polinom razstavimo do oblike

$$q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_m)^{\alpha_m}$$
$$(x^2 + a_1 x + b_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + a_n x + b_n)^{\beta_n}.$$

Pri tem so polinomi v drugi vrstici nerazcepni, saj so produkt izrazov oblike $(x - x_k)(x - \overline{x_k})$, kjer sta x_k in $\overline{x_k}$ konjugirani par kompleksnih ničel.

Kvocient $\frac{r(x)}{q(x)}$ se da vedno razcepiti na parcialne ulomke. Če ima imenovalec ničlo x_i reda α_i, potem v razcepu na parcialne ulomke nastopajo členi $\dfrac{c_1}{x-x_i}+\dfrac{c_2}{(x-x_i)^2}+\ldots+\dfrac{c_{\alpha_i}}{(x-x_i)^{\alpha_i}}$,
če pa ima imenovalec konjugirani kompleksni ničli y_j in $\overline{y_j}$ reda β_j, torej je v produkt člen $(x^2+a_jx+b_j)^{\beta_j}$, potem v razcepu na parcialne ulomke nastopajo členi
$$\frac{d_1x+e_1}{x^2+a_jx+b_j}+\ldots+\frac{d_{\beta_j}x+e_{\beta_j}}{(x^2+a_jx+b_j)^{\beta_j}}.$$

Integral racionalne funkcije razpade na vsoto integralov, vsak od dobljenih integralov pa je ene izmed oblik

- $\displaystyle\int \frac{c}{(x-x_1)^n}dx$
- $\displaystyle\int \frac{d\cdot x+e}{(x^2+ax+b)^m}dx$

Drugi integral je enak vsoti racionalne funkcije, logaritma in arkus tangensa.

Primer

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}\,dx$$

Primer

$$\int \frac{2x^3}{x^2 + 2x + 2} dx$$

Opomba

Rezultat integriranja racionalne funkcije je vsota polinoma, racionalne funkcije, logaritma linearne funkcije, logaritma kvadratne funkcije in arkus tangensa.