Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

19. december 2013

Integral trigonometričnih funkcij

Naj bo R racionalna funkcija sinusov in kosinusov, torej v števcu in imenovalcu nastopata polinoma sinusov in kosinusov (na primer $\frac{\sin^2 x \cos x - 4\cos x}{3\cos^4 x - \sin x \cos x + 1}$).

Potem znamo integral $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx$ z univerzalno substitucijo pretvoriti v integral racionalne funkcije, ki se ga da vedno rešiti.

Uvedemo univerzalno substitucijo

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

Funkciji sinus in kosinus moramo izraziti s t, to je s $\tan\frac{x}{2}$.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Določiti moramo še zvezo med dx in dt.
Ker je $t = \tan\frac{x}{2}$ in zato $x = 2\arctan t$, je

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Dobimo

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2},$$

kar pa je integral racionalne funkcije spremenljivke t, ki se ga da izračunati.

Primer

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

Opomba

Večkrat pridemo pri računanju integralov trigonometričnih funkcij s kakšno drugo substitucijo, ki ni univerzalna, hitreje do rešitve.

Integral funkcij oblike $\sin^m x \cos^n x$.

Naj bosta m in n nenegativni celi števili. Radi bi izračunali integral

$$\int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Ločimo dva primera.
Če je m ali n liho število, na primer $m = 2k + 1$, potem za novo spremenljivko izberemo $u = \cos x$.
Potem je $du = -\sin x dx$ in

$$\sin^{2k} x = (\sin^2 x)^k = (1 - \cos^2 x)^k = (1 - u^2)^k.$$

Dobimo integral polinoma v spremenljivki u

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx = \int (1-u^2)^k u^n (-du).$$

Primer

Izračunajmo integral

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

Če sta m in n sodi števili, potem izračunamo integral

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

tako, da ga preoblikujemo v integral sinusov in kosinusov s potencama $\frac{m}{2}$ in $\frac{n}{2}$.
Pri tem upoštevamo zvezi:
$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ in $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

Primer

$$\int \sin^4 x dx$$

Pri računanju integralov oblike

$$\int \sin(ax)\cos(bx)dx$$

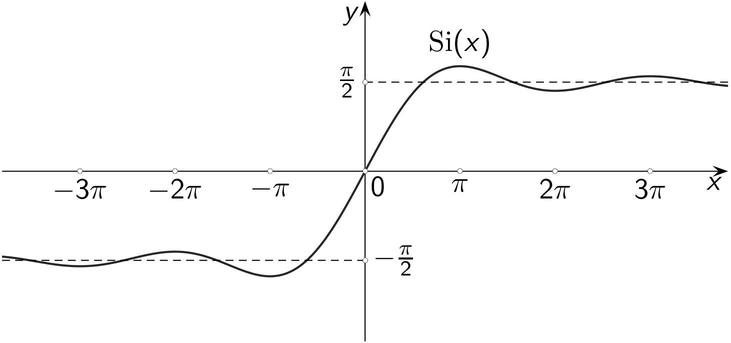
upoštevamo adicijske izreke.

Opomba

Nedoločeni integral nekaterih elementarnih funkcij ni elementarna funkcija, na primer

$$\int e^{-x^2} dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx.$$


y
Si(x)
$\frac{\pi}{2}$
-3π
-2π
$-\pi$
0
π
2π
3π
x
$-\frac{\pi}{2}$

Določeni integral

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu pozitivna, zvezna in zato omejena funkcija. Radi bi izračunali ploščino med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[a, b]$.
Ploščino bomo izračunali tako, da jo bomo aproksimirali s ploščino pravokotnikov.

Interval $[a, b]$ razdelimo na n podintervalov $[x_{k-1}, x_k]$, pri čemer je

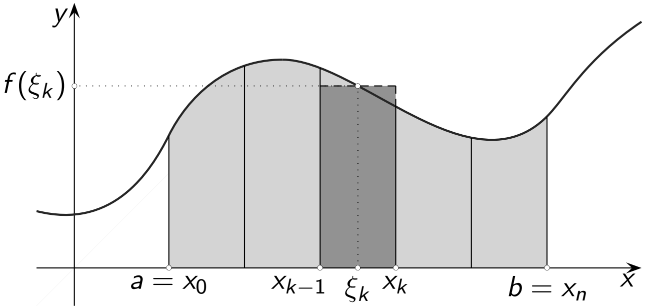
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Na vsakem podintervalu izberemo poljubno točko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Zmnožek

$$f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

je potem enak ploščini pravokotnika z osnovnico $[x_{k-1}, x_k]$ in višino $f(\xi_k)$.



Seštejemo ploščine vse takih pravokotnikov in dobimo približek za ploščino med grafom funkcije f in abscisno osjo.

Naj bo sedaj $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija. Naj bo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ razdelitev intervala $[a,b]$ in naj bo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Potem je Riemannova oziroma integralska vsota funkcije f za dano delitev intervala $[a,b]$ enaka

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Število I imenujemo določeni integral funkcije f na intervalu $[a,b]$, če za vsak ε obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| < \epsilon,$$

čim je $\max\limits_{k=1,\ldots,n}\{\delta_k\} < \delta$, pri čemer je $\delta_k = x_k - x_{k-1}$.

Če tako število I obstaja, potem pravimo, da je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b]$ in pišemo

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

pri čemer je $\delta_k = x_k - x_{k-1}$.

Funkcija f je torej integrabila, če obstaja limita integralskih vsot, ko gre dolžina najdaljšega intervala proti nič.