Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

2. januar 2014

Izrek (Izrek o povprečni vrednosti)

Naj bo m natančna spodnja meja in M natančna zgornja meja integrabilne funkcije f na intervalu $[a, b]$. Potem obstaja tako število P, da je $m \leq P \leq M$ in

$$P = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Če je funkcija f tudi zvezna na intervalu $[a, b]$, potem obstaja vsaj ena taka točka $\xi \in [a, b]$, da je

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Dokaz

Ker je $m \leq f(x) \leq M$ *za vsak* $x \in [a, b]$, *velja*

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

torej je

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Definiramo

$$P = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

in potem je $m \leq P \leq M$.

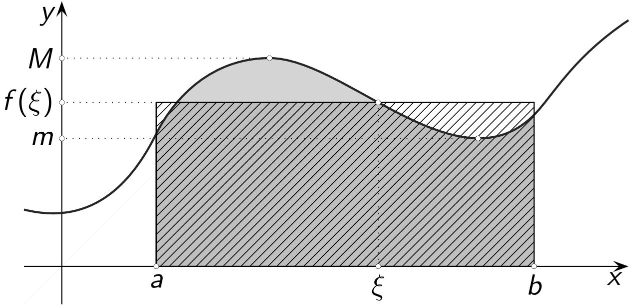
Če je f zvezna, potem zavzame vse vrednosti med m in M, torej obstaja $\xi \in [a, b]$, tako da je $f(\xi) = P$ in zato

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Opomba

Naj bo f pozitivna funkcija. Ploščina območja pod grafom funkcije f nad intervalom $[a, b]$ je:
večja od ploščine pravokotnika z osnovnico $[a, b]$ in višino, ki je enaka minimalni vrednosti funkcije f,
manjša od ploščine pravokotnika z osnovnico $[a, b]$ in višino, ki je enaka maksimalni vrednosti funkcije f.

Torej je ploščina območja pod grafom funkcije f nad intervalom $[a, b]$ enaka ploščini pravokotnika z osnovnico $[a, b]$ in višino, ki je med minimalno in maksimalno vrednostjo funkcije f.



Izrek

Naj bo funkcija f integrabilna na intervalu $[a,b]$. Potem je

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Torej je absolutna vrednost integrala manjša ali enaka integralu absolutne vrednosti.

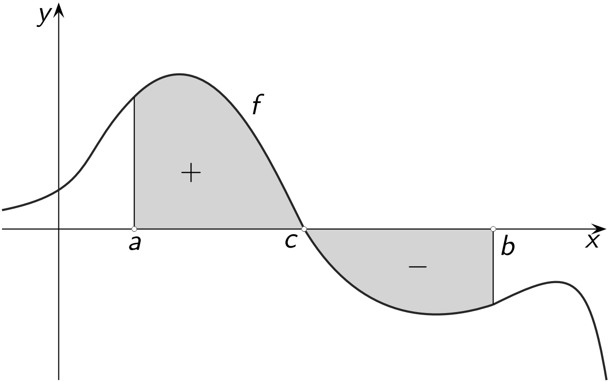
Dokaz

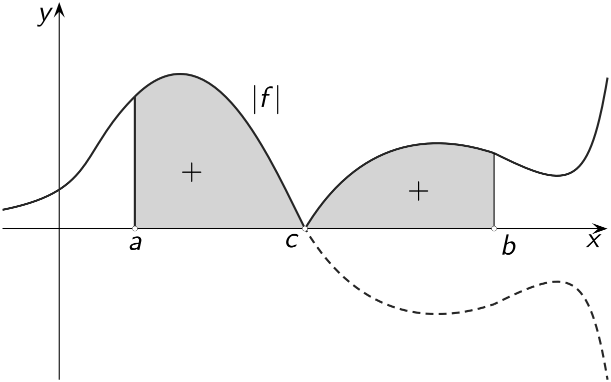
Za vsako integralsko vsoto po trikotniški neenakosti velja

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1})$$

pri čemer smo upoštevali, da je $|x_k - x_{k-1}| = x_k - x_{k-1}$.
V limiti je desna stran neenakosti enaka $\int_a^b |f(x)|dx$.

Primer



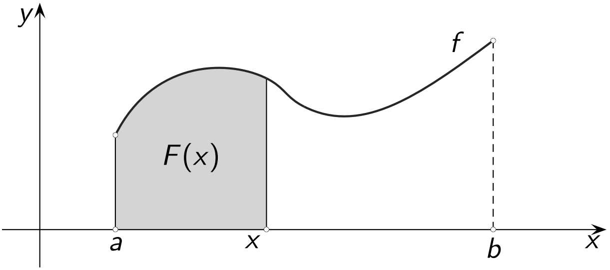

y
|f|
+
+
a
c
b
x

Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Definicija

Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in zato integrabilna funkcija. Potem za vsak $x \in [a,b]$ obstaja integral $\int_a^x f(t)dt$, zato lahko definiramo funkcijo $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$



Oglejmo si, kaj velja za funkcijo F.

Izrek

(Osnovni izrek analize.) Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

odvedljiva, zato tudi zvezna, in

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Opomba

Funkcija F je zvezna, saj je vsaka odvedljiva funkcija tudi zvezna.

Dokaz

Zapišemo

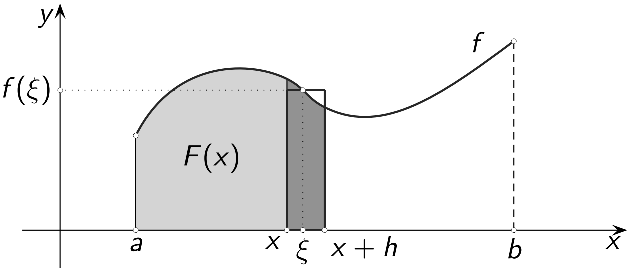
$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Po izreku o povprečni vrednosti obstaja $\xi \in [x, x+h]$*, tako da je*

$$f(\xi) = \frac{1}{x+h-x} \int_x^{x+h} f(t)dt, \text{ torej je } f(\xi)h = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

in zato

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi).$$



Sledi

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi) = f(x).$$

Pokazali smo, da je odvod funkcije F enak funkciji f,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),$$

torej je funkcija F nedoločeni integral funkcije f,

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt.$$

V nadaljevanju si oglejmo, kako lahko izračunamo določeni integral s pomočjo nedoločenega integrala.

Izrek (Newton - Leibnitzeva formula)

Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija in naj bo G poljuben nedoločeni integral funkcije f, torej

$$G(x)=\int f(x)dx.$$

Potem je

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a).$$

Dokaz

Naj bo G poljuben nedoločeni integral funkcije f, torej

$$G(x) = \int f(x)dx.$$

V prejšnjem izreku smo pokazali, da je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

vedno nedoločeni integral funkcije f, vsi nedoločeni integrali funkcije f pa se med sabo razlikujejo samo za konstanto, zato je

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Izračunajmo, koliko je $G(b) - G(a)$. Velja

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt + C - \left(\int_a^a f(t)dt + C\right)$$
$$= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - 0$$
$$= \int_a^b f(t)dt$$

Opomba

Newton-Leibnitzeva formula pove, kako lahko izračunamo določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ funkcije f na intervalu $[a, b]$.
Najprej poiščemo nedoločeni integral G funkcije f in nato izračunamo razliko funkcijskih vrednosti $G(x)|_a^b = G(b) - G(a)$.