Matematika 1

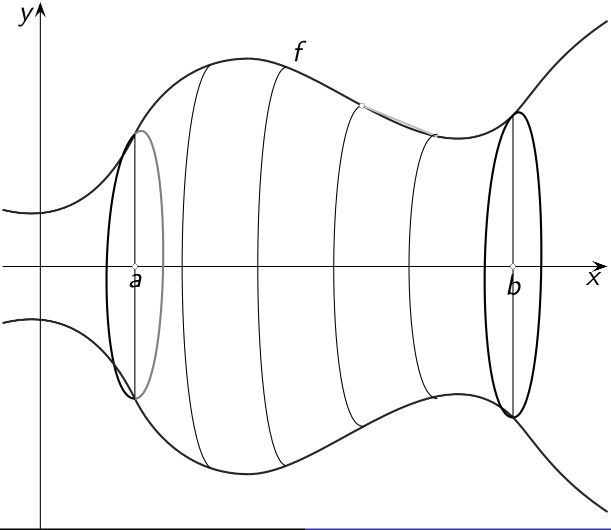
Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

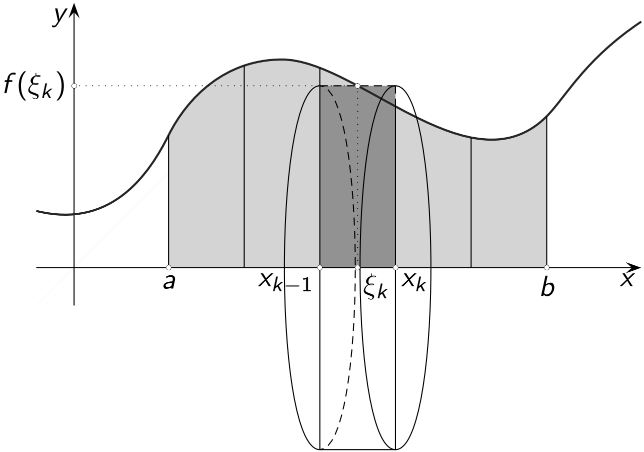
14. januar 2014

- Prostornina rotacijskega telesa

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nenegativna zvezna funkcija. Zavrtimo graf te funkcije okrog abscisne osi in dobimo rotacijsko ploskev.



Zanima nas prostornina območja, ki je omejeno s to rotacijsko ploskvijo in ravninama $x = a$ in $x = b$.
Interval $[a, b]$ razdelimo na podintervale $[x_{k-1}, x_k]$, $x_0 = a$, $x_n = b$, in izberemo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ za vsak $k = 1, \dots, n$.



Potem je prostornina rotacijskega telesa nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ približno enaka prostornini valja s polmerom $f(\xi_k)$ in višino $x_k - x_{k-1}$, torej

$$\pi(f(\xi_k))^2(x_k - x_{k-1}).$$

Definiramo integralsko vsoto

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(\xi_k))^2(x_k - x_{k-1})$$

in pogledamo, koliko je limita integralskih vsot, ko gre $n \to \infty$ in $x_k - x_{k-1} \to 0$ za vsak k.
Če limita obstaja, potem je prostornina rotacijskega telesa enaka

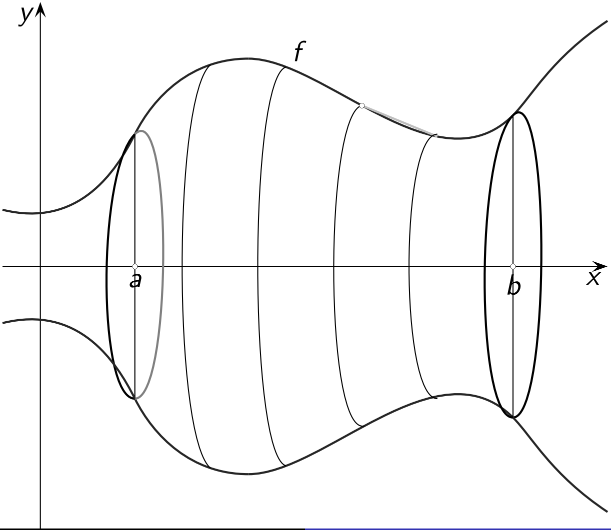
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Primer

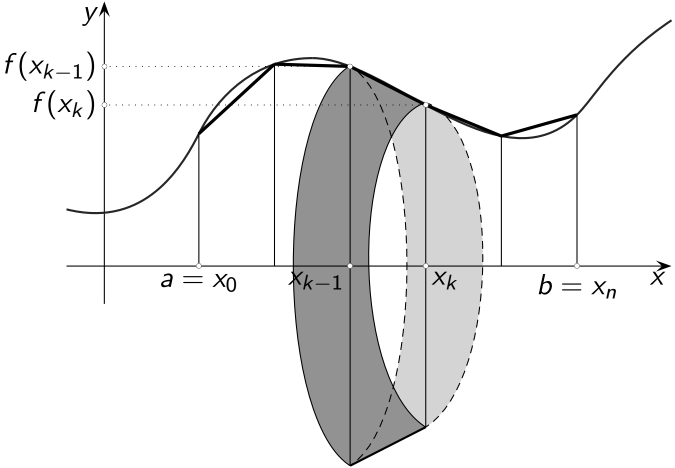
Izračunajmo prostornino krogle s polmerom a.

- Površina rotacijskega telesa

Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nenegativna zvezna funkcija. Zavrtimo graf te funkcije okrog abscisne osi in dobimo rotacijsko ploskev.



Interval $[a, b]$ razdelimo na podintervale $[x_{k-1}, x_k]$, $x_0 = a$, $x_n = b$, in izberemo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ za vsak $k = 1, \ldots, n$.



Potem je površina rotacijskega telesa nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ približno enaka površini plašča prisekanega stožca s polmeroma $f(x_{k-1})$, $f(x_k)$ in stranico s_k, torej

$$2\pi \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot s_k$$

$$= 2\pi \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}(x_k - x_{k-1}).$$

Definiramo integralsko vsoto

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}(x_k - x_{k-1})$$

in pogledamo, koliko je limita integralskih vsot, ko gre $n \to \infty$ in $x_k - x_{k-1} \to 0$ za vsak k.

Če limita obstaja, potem je površina rotacijskega telesa enaka

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Primer

Izračunajmo površino krogle s polmerom a.

Delo, ki ga opravi sila vzdolž premice

Delo, ki ga opravimo, če delujemo s konstantno silo F vzdolž premice od točke a do točke b na razdalji $s = b - a$, izračunamo po formuli

$$A = F \cdot s.$$

Če sila na celotni poti ni konstantna, torej je $F = F(x)$, potem izračunamo delo s pomočjo integrala

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Če želimo raztegniti na enem koncu pritrjeno vzmet od točke a do točke b, potem se po Hookovem zakonu sila povečuje po formuli $F(x) = kx$, k je konstanta odvisna od vzmeti.
Delo, ki ga opravimo, je potem

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b kxdx = k\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{k}{2}(b^2 - a^2).$$

Uporaba določenega integrala pri določanju kovergence številske vrste

Izrek (Integralski kriterij)

Če je f nenegativna, zvezna in padajoča funkcija na intervalu $[a, \infty)$, potem posplošeni integral

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

in številska vrsta

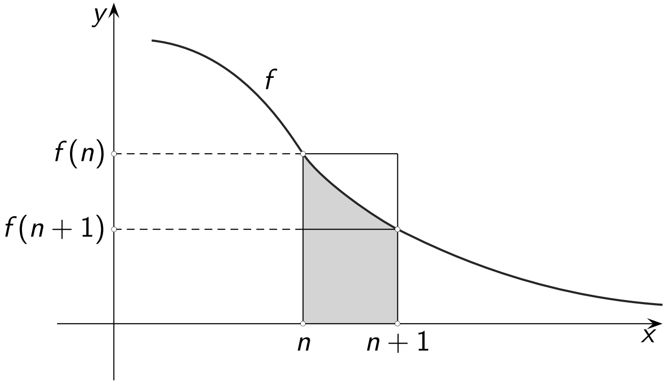
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

oba konvergirata ali oba divergirata.

Dokaz

Ker je funkcija padajoča, je

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq f(n+1).$$



Velja

$$\sum_{n=a}^{N} f(n) \geq \sum_{n=a}^{N} \int_{n}^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{n=a}^{N} f(n+1).$$

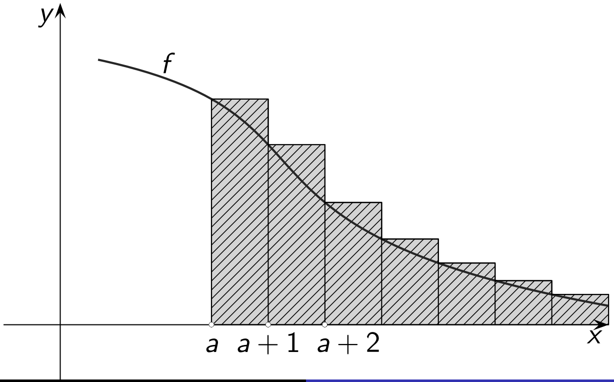
Torej

$$\sum_{n=a}^{N} f(n) \geq \int_{a}^{N+1} f(x)dx \geq \sum_{n=a+1}^{N+1} f(n).$$

Če je številska vrsta konvergentna, potem je

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \geq \int_a^{\infty} f(x)dx,$$

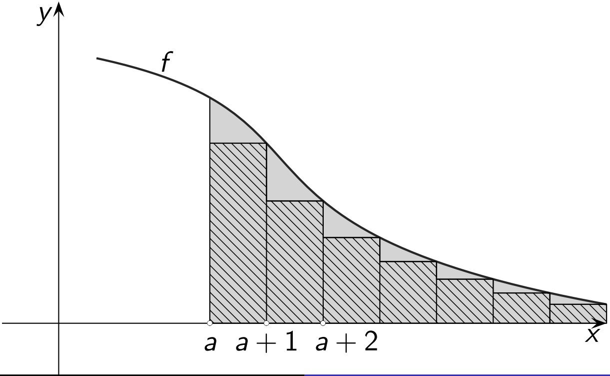
zato je v tem primeru konvergenten tudi integral.



Če pa je konvergenten integral, je

$$\int_a^\infty f(x)dx \geq \sum_{n=a+1}^\infty f(n),$$

torej je v tem primeru konvergentna tudi številska vrsta.



Primer

Preverimo konvergenco vrste $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.