

MATEMATIKA I (Vaje)

Uporaba Matematike I v elektrotehniki

Avtorica: Melita Hajdinjak

Datum: avgust 2007

1 ŠTEVILSKÉ VRSTE

1. [RAZVRŠČANJE VZORCEV] Ko želimo še nerazvrščen vzorec samodejno razvrstiti oz. opredeliti, izračunamo razdalje tega vzorca do vseh znanih razredov vzorcev. Razvrstimo ga v tisti razred vzorcev, od katerega je najmanj oddaljen in zato vsebuje vzorce, ki so mu v povprečju najbolj podobni.

Vzorci naj bodo opisani z vektorji, N_i naj bo število vzorcev v i -tem razredu, x_{ik} pa vektor, s katerim je opisan k -ti vzorec i -tega razreda. Oddaljenost $D_i(x)$ vzorca x od i -tega razreda vzorcev lahko računamo kot povprečje razdalj $D(x, x_{ik})$ med vzorcem x in vzorci iz i -tega razreda:

$$D_i(x) = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} D(x, x_{ik}).$$

Pri tem lahko za mero podobnosti oz. različnosti med vzorcema x in x_{ik} vzamemo Evklidsko razdaljo

$$D(x, x_{ik}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - x_{ikj})^2},$$

kjer je n razsežnost vektorjev, x_j in x_{ikj} pa j -ti komponenti vektorjev x in x_{ik} .

Imejmo dva razreda vzorcev – v prvem razredu naj bodo beli trikotniki, v drugem pa črni štirikotniki. Predstavniki obeh razredov so opisani s številom oglišč in povprečno svetilnostjo slikovnih elementov. V prvem razredu so "beli trikotniki"

$$(3, 1), (3, 0.9), (3, 0.8), (3, 0.8)$$

v drugem pa "črni štirikotniki"

$$(4, 0), (4, 0.1), (4, 0.2).$$

Izračunajte razdalje temnosivega trikotnika $(3, 0.2)$ do obeh razredov vzorcev.

REŠITEV:

$$D_1(x) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 D(x, x_{1k}) = \frac{1}{4}(0, 8 + 0, 7 + 0, 6 + 0, 6) = 0,9$$

$$\begin{aligned} D_2(x) &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 D(x, x_{2k}) = \frac{1}{3}(\sqrt{1^2 + 0, 2^2} + \sqrt{1^2 + 0, 1^2} + 1) = \\ &= \frac{2\sqrt{26} + \sqrt{101} + 10}{30} \approx 1,01 \end{aligned}$$

Ker je temnosiv trikotnik od razreda belih trikotnikov manj oddaljen kot od razreda črnih štirikotnikov, ga razvrstimo v razred belih trikotnikov. Na osnovi izračunanih razdalj bi se lahko odločili tudi, da temnosivega trikotnika ne bi razvrstili v noben razred vzorcev. Pri samodejnem razviščanju vzorcev pogosto določimo prag razdalje, ki še dovoljuje razvrstitev vzorca v razred. V našem primeru bi za prag lahko vzeli npr. vrednost 0,5.

2. [OBDELAVA SIGNALOV] Pri statističnem opisovanju naključnih procesov (kot na primer naključnih signalov) igra pomembno vlogo pojem *vzorčno povprečje*. Vzorcno povprečje naključnega signala ob izbranem časovnem trenutku t_1 je definirano kot povprečna vrednost vseh realizacij signala $x(t)$ ob času t_1 :

$$\overline{x(t_1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1),$$

kjer je z $x_k(t_1)$ označena k -ta realizacija naključnega signala $x(t)$, n pa je število vseh realizacij, ki jih obravnavamo.

Naj bodo

$$0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 0.000001, 0.0000001, 0.00000001,$$

$$0.2, 0.02, 0.002, 0.0002, 0.00002, 0.000002, 0.0000002, 0.00000002$$

realizacije naključnega signala $x(t)$ ob času 0. Določite vzorcno povprečje.

REŠITEV:

$$\begin{aligned} \overline{x(0)} &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^7} + \frac{1}{10^8} \right) + \\ &+ \frac{1}{16} \cdot 2 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^7} + \frac{1}{10^8} \right) = \\ &= \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10}}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^8} = \frac{27 \cdot 10^6}{16(10^8 - 1)} \approx 0.017 \end{aligned}$$

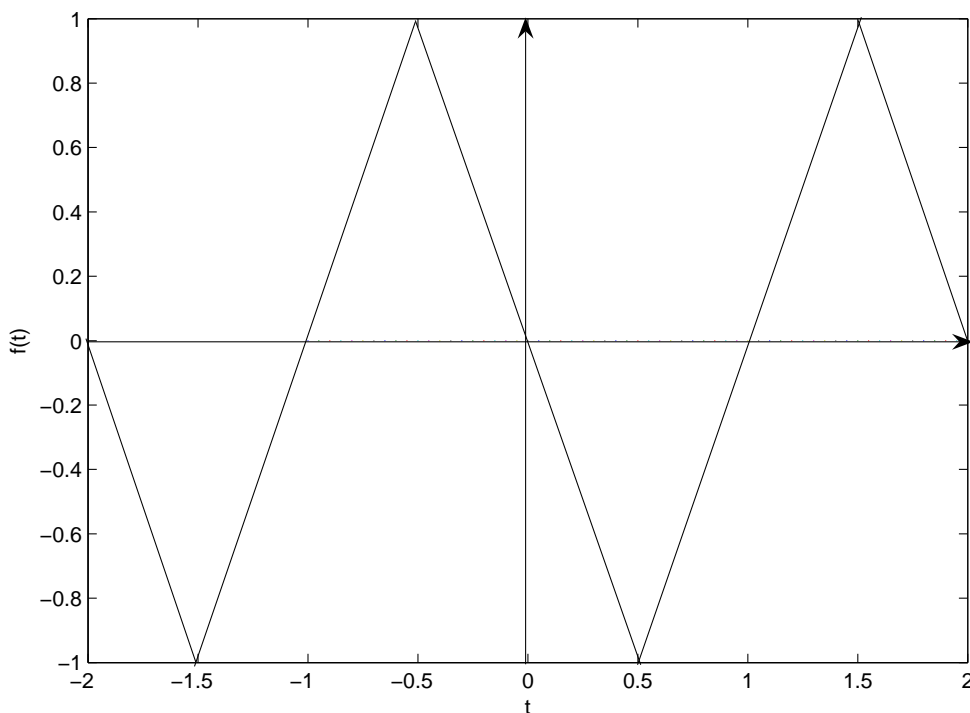
3. [OBDELAVA SIGNALOV]

2 FUNKCIJE ENE SPREMENLJIVKE (UVOD)

1. [OBDELAVA SIGNALOV] Postopki, ki vodijo do frekvenčne predstavitve signalov, in postopki, s katerimi iščemo približke k originalnim signalom, se velikokrat poenostavijo, če ima signal določene lastnosti, kot sta na primer sodost in lihost. Preden takšen (pogosto časovno in računsko zamuden) postopek izvajamo, preverimo, ali ima dan signal kakšne koristne lastnosti.

Za naslednje signale ugotovite, ali so sodi, lihi, ali niso niti sodi niti lihi.

- (a) Signal $f(t)$ prikazuje naslednja slika.



(b) $g(t) = \frac{t}{2} \sin(t - \frac{\pi}{2})$

(c)
$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ e^{1-t}, & t > 1 \end{cases}$$

REŠITEV:

- (a) Signal $f(t)$ je lih.

- (b) Ker velja $\sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos t$, je

$$g(-t) = \frac{-t}{2} (-\cos(-t)) = \frac{t}{2} \cos t = -g(t)$$

in signal $g(t)$ je lih.

(c) Signal $h(t)$ ni niti sod niti lih:

$$h(-t) = \begin{cases} 0, & -t < 0 \\ 1, & 0 \leq -t \leq 1 \\ e^{1+t}, & -t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & -1 \leq t \leq 0 \\ e^{1+t}, & t < -1 \end{cases} \neq \pm h(t)$$

2.

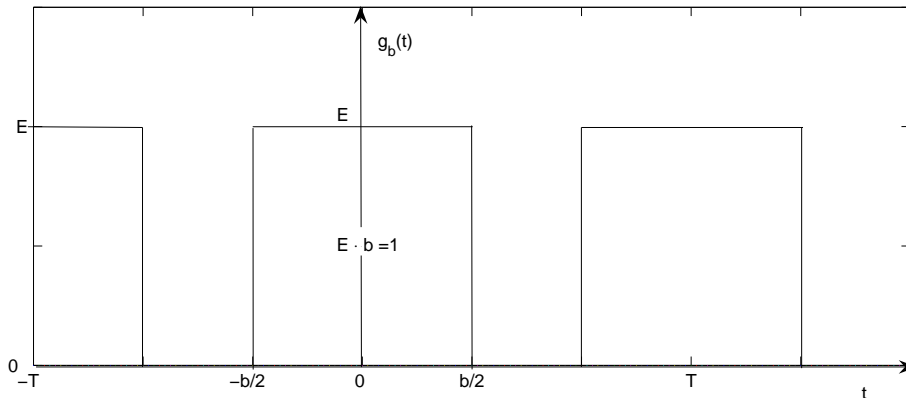
3.

3 LIMITE

- [OBDELAVA SIGNALOV] Opazujmo družino sodih periodičnih pravokotnih impulzov $g_b(t)$ z enako periodo T , za katere velja, da so površine impulzov enake 0. Ena perioda signala $g_b(t)$ periodičnih pravokotnih impulzov je podana s predpisom

$$g_b(t) = \begin{cases} E, & Eb = 1 \text{ in } -\frac{b}{2} \leq t < \frac{b}{2} \\ 0, & \frac{b}{2} \leq t < T - \frac{b}{2} \end{cases} .$$

Signal $g_b(t)$ prikazuje tudi spodnja slika:



Kompleksni spekter $G_b(n)$, ki ga dobimo z integriranjem, je enak

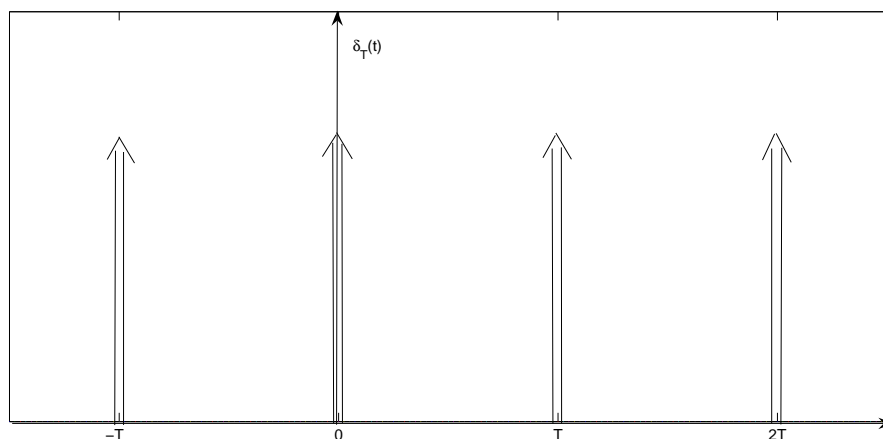
$$G_b(n) = \frac{Eb \sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{T \frac{n\omega_0 b}{2}} = \frac{1 \sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{T \frac{n\omega_0 b}{2}},$$

kjer je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Kaj se zgodi s signalom $g_b(t)$ in s spektrom $G_b(n)$, ko ožimo širino b pravokotnih impulzov? Izračunajte limito.

REŠITEV:

Ko ožimo širino b pravokotnih impulzov, se amplituda E povečuje. V limiti $b \rightarrow 0$ raste E čez vse meje ($E \rightarrow \infty$), kar pomeni, da postanejo impulzi poljubno visoki. V limiti torej dobimo periodičen niz impulzov z neomejeno amplitudo in neskončno majhnim časom trajanja. Takšnega signala, ki ga običajno označimo z $\delta_T(t)$, ni mogoče praktično realizirati. Kljub temu igra v elektrotehniko pomembno vlogo. Signal $\delta_T(t)$, ki ima neomejeno povprečno moč, simbolično predstavimo s periodičnim zaporedjem odebeljenih puščic, kot je prikazano na spodnji sliki:



Spekter $G_b(n)$ obstaja in je omejen:

$$\lim_{b \rightarrow 0} G_b(n) = \frac{1}{T} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} = \frac{1}{T}.$$

- 2.
- 3.

4 ODVODI IN EKSTREMI

1. [OBDELAVA SIGNALOV] Frekvenčna oz. spektralna predstavitev periodičnega signala imenujemo zapis periodičnega signala s *Fourierjevo vrsto*, tj. z neskončno vsoto

sinusnih nihanj s frekvencami $n\omega_0$, kjer je

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

krožna frekvenca, n celo število, T pa perioda signala. Sinusno nihanje predstavlja osnovni model nihanja, ki ga zasledimo v naravi. Z njim lahko na primer opišemo nihanje matematičnega nihala ali nihanje, ki ga dosežemo z električnim vezjem nihajnega kroga.

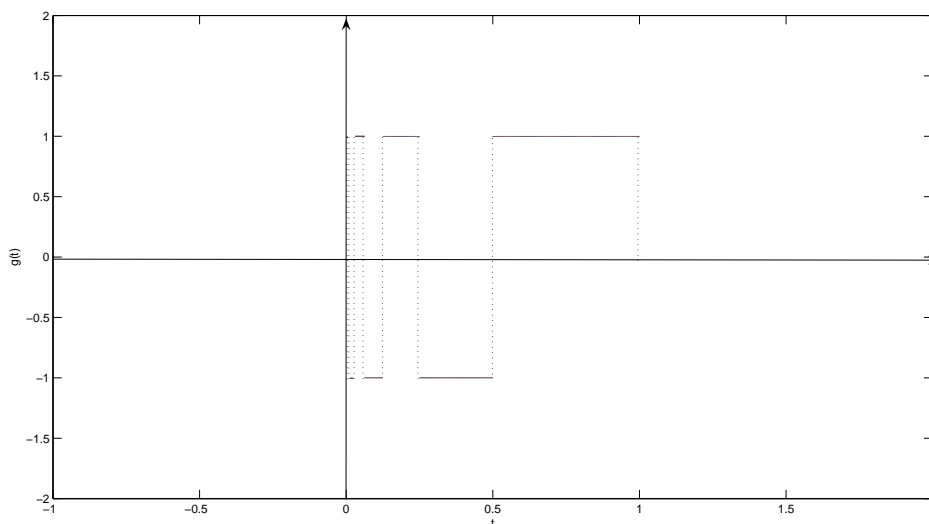
Povprečna moč signala napake, ki ga dobimo kot razliko med originalnim signalom $f(t)$ in njegovo Fourierjevo vrsto

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n)e^{in\omega_0 t}$$

je enaka 0. Težave lahko nastopijo le primeru, ko vrednosti Fourierjevih koeficientov $F(n)$ (v izračunu nastopa integral) ne moremo določiti ali če Fourierjeva vrsta ni konvergentna. Izkaže se, da je konvergenca Fourierjeve vrste zagotovljena, če periodični signal izpolnjuje tako imenovane *Dirichletove pogoje*. Eden izmed Dirichletovih pogojev pravi, da sme signal $f(t)$ na intervalu ene periode imeti **kvečjemu končno število lokalnih minimumov in maksimumov**. Drugi pogoj pravi, da sme signal $f(t)$ na intervalu ene periode imeti **kvečjemu končno število nezveznosti**.

Za naslednje periodične signale ugotovite, ali izpolnjujejo omenjena Dirichletova pogoja:

- (a) $f(t) = \arctan \cos \frac{t}{2}$
- (b) Eno periodo dolžine 1 periodičnega signala $g(t)$ prikazuje naslednja slika.



REŠITEV:

- (a) Signal $f(t) = \arctan \cos \frac{t}{2}$ je zvezen, saj je kompozicija zveznih funkcij. Na intervalu ene periode torej nima nobene točke nezveznosti in zato izpolnjuje Dirichletov pogoj o (ne)zveznosti. Stacionarne točke, ki so v tem primeru edini kandidati (ni točk nezveznosti, točk neodvedljivosti in robov definicijskega območja) za ekstreme, dobimo kot ničle prvega odvoda funkcije $f(t)$:

$$f'(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{t}{2}}{1 + \cos^2 \frac{t}{2}} = 0.$$

Sledi, funkcija $f(t)$ ima na celotnem definicijskem območju števno neskončno lokalnih ekstremov, ki nastopijo pri pogoju $\sin \frac{t}{2} = 0$ v točkah $t = 2k\pi$, kjer je k celo število. Na intervalu ene periode (npr. na intervalu $[0, 4\pi)$) ima le dva lokalna ekstrema ($t_1 = 0$ in $t_2 = 2\pi$) in zato izpolnjuje tudi Dirichletov pogoj o lokalnih ekstremih.

- (b) Signal $g(t)$ ima na intervalu ene periode $(0, 1]$ števno neskončno točk nezveznosti, kar pomeni, da ne izpolnjuje Dirichletovega pogoja o (ne)zveznosti. Ta signal ne izpolnjuje niti Dirichletovega pogoja o lokalnih ekstremih.
2. [OBDELAVA SIGNALOV] Opazujmo hkratne realizacije signala $x(t)$ ob času t_1 in signala $y(t)$ ob času t_2 , ki ju rodi isti naključni proces. V namene ugotavljanja soodvisnosti amplitud obeh signalov uporabljamo kriterijsko funkcijo srednje kvadratne napake:

$$\overline{\epsilon_{t_1 t_2}^2(b)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k(t_1) - by_k(t_2))^2,$$

kjer je n število hkratnih realizacij signalov in b parameter kriterijske funkcije, ki ga želimo določiti, tako da bo vrednost srednje kvadratne napake $\overline{\epsilon_{t_1 t_2}^2(b)}$ najmanjša.

Ko je vrednost srednje kvadratne napake enaka 0, lahko vrednosti amplitud signala $y(t)$ ob času t_2 popolnoma določimo z vrednostmi $x(t)$ ob času t_1 .

Določite b , ki minimira srednjo kvadratno napako.

REŠITEV:

Potreben pogoj za nastop ekstrema je

$$\frac{\partial \overline{\epsilon_{t_1 t_2}^2(b)}}{\partial b} = 0.$$

Ker je

$$\overline{\epsilon_{t_1 t_2}^2(b)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k^2(t_1) - 2bx_k(t_1)y_k(t_2) + b^2y_k^2(t_2)),$$

je

$$\frac{\partial \overline{\epsilon_{t_1 t_2}^2(b)}}{\partial b} = 2 \left[-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1)y_k(t_2) + b \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2(t_2) \right] = 0.$$

Iz enačbe

$$-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1)y_k(t_2) + b \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2(t_2) = 0$$

dobimo za vrednost parametra b naslednjo rešitev:

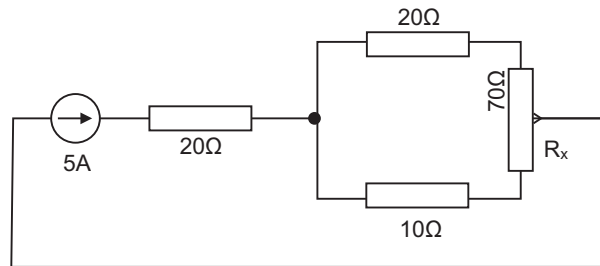
$$b = \frac{\sum_{k=1}^n x_k(t_1)y_k(t_2)}{\sum_{k=1}^n y_k^2(t_2)}.$$

Če ima vsaj ena realizacija signala $y(t)$ ob času t_2 od 0 različno amplitudo, je drugi odvod

$$\frac{\partial^2 \overline{\epsilon_{t_1 t_2}^2(b)}}{\partial b^2} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2(t_2) > 0,$$

kar pomeni, da izračunana vrednost parametra b določa minimum srednje kvadratne napake.

3. [OSNOVE ELEKTROTEHNIKE] V kateri legi drsnika oziroma pri kateri vrednosti upornosti R_x spodnjega dela drsnega upora bo električna moč v vseh uporih skupaj maksimalna in kolikšna bo ta moč?



REŠITEV:

Ker je vezje uporov tokovno vzbujano, bo električna moč v vseh uporih skupaj maksimalna takrat, ko bo maksimalna tudi njihova nadomestna upornost:

$$\begin{aligned} R_{nad}(R_x) &= 20\Omega + \frac{(10\Omega + R_x)(90\Omega - R_x)}{(10\Omega + R_x) + (90\Omega - R_x)} = 20\Omega + \frac{900\Omega^2 + 80\Omega \cdot R_x - R_x^2}{100\Omega} \\ &= \frac{2900\Omega^2 + 80\Omega \cdot R_x - R_x^2}{100\Omega} \end{aligned}$$

Navzdol obrnjena parabola ima teme pri $R_x = 40\Omega$. Isti rezultat dobimo tudi, če iščemo ekstrem funkcije $R_{nad}(R_x)$ z uporabo odvodov:

$$R'_{nad}(R_x) = \frac{1}{100\Omega}(80\Omega - 2R_x) = 0$$

$$R''_{nad}(40\Omega) = \frac{-2}{100} = -\frac{1}{50} < 0$$

Nadomestna upornost doseže pri $R_x = 40\Omega$ vrednost 45Ω , električna moč pa je enaka

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R_x = (5\text{A})^2 \cdot 45\Omega = 1125\text{W}.$$

4.1 GRAFI FUNKCIJ

1. [ELEKTRIČNA IN MEHANSKA VEZJA] Dinamične lastnosti sistemov opišemo z več števili vrednostmi in terminološkimi opisi. Najpomembnejši so: lega polov in ničel, vrsta in red sistema, časovne konstante (τ), koeficienti dušenja (ζ), frekvence nihanja (f), krožne frekvence (ω) in ojačenje (K_s). Pomembna lastnost je stabilnost sistema, ki jo lahko določimo iz odziva sistema na testne signale. Eden izmed kriterijev stabilnosti pravi, da so sistemi *stabilni*, kadar leži eden ali več polov v levi polravnini kompleksne ravnine, da so *mejno stabilni*, kadar njihovi poli ležijo na imaginarni osi, in so *nestabilni*, kadar imajo vsaj en pol v desni polravnini kompleksne frekvence s .

Linearen, časovno nespremenljiv sistem običajno opišemo s prenosno funkcijo $G(s)$. Ničle sistema določimo kot korene števca, pole pa kot kor ene imenovalca prenosne funkcije. Red sistema določa najvišja potenca imenovalca, vrsto pa število polov v koordinatnem izhodišču. Kadar ima sistem enega ali več polov v koordinatnem izhodišču kompleksne ravnine, govorimo o *integriranih sistemih*, *diferencialni sistemi* pa imajo v koordinatnem izhodišču kompleksne ravnine eno ali več ničel. Če v koordinatnem izhodišču sistem nima niti polov niti ničel, imamo opravka s *proporcionalnim* sistemom, če ležijo vsi poli sistema v levi polravnini. Časovne konstante določimo iz imenovalca prenosne funkcije kot

$$\tau_i = \frac{1}{\Re(a_i)},$$

pri čemer so a_i poli prenosne funkcije. Koeficiente dušenja lahko določimo samo za prispevke konjugiranih kompleksnih polov kot

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Im(a_i)}{\Re(a_i)}\right)^2}},$$

kjer so a_i poli prenosne funkcije. Dejanska frekvenca nihanja in f_d in krožna frekvenca ω_d sta določeni kot

$$f_d = \frac{1}{2\pi} |\Im(a_i)|, \quad \omega_d = |\Im(a_i)|,$$

naravna krožna frekvenca, ki jo imenujemo tudi *lastna frekvenca nedušenega nihanja*, pa kot

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{(\Re(a_i))^2 + (\Im(a_i))^2} = |a_i|.$$

Ojačenje K_s je definirano kot

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s),$$

če limita obstaja.

Izračunajte dinamične lastnosti (poli in ničle, vrsta in red sistema, časovne konstante, koeficienti dušenja, frekvence nihanja, krožne frekvence in ojačenje) sistema, opisanega s prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{(s^2 + 2s + 12)(s^2 + 3s + 12)}.$$

Skicirajte tudi graf prenosne funkcije.

REŠITEV:

Ničle določimo iz enačbe

$$s^2 + 3s + 1 = 0.$$

Dobimo dve realni ničli:

$$n_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \approx -0,38, \quad n_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \approx -2,62.$$

Pole določimo iz karakteristične enačbe sistema:

$$(s^2 + 2s + 12)(s^2 + 3s + 12) = 0.$$

Dobimo štiri kompleksne pole:

$$\begin{aligned} p_1 &= -1 + i\sqrt{11} \approx -1 + 3,32i \\ p_2 &= -1 - i\sqrt{11} \approx -1 - 3,32i \\ p_3 &= \frac{-3 + i\sqrt{39}}{2} \approx -1,5 + 3,12i \\ p_4 &= \frac{-3 - i\sqrt{39}}{2} \approx -1,5 - 3,12i \end{aligned}$$

Sistem je četrtega reda in ničte vrste, rečemo mu lahko proporcionalni sistem četrtega reda. Sistem ima dve različni časovni konstanti,

$$\tau_{1,2} = \frac{1}{-1} = -1, \quad \tau_{3,4} = \frac{1}{-1,5} = -\frac{2}{3} \approx -0,67,$$

dva različna koeficienta dušenja,

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0,29, \quad \zeta_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,43,$$

dve različni dejanski frekvenci nihanja,

$$f_{d1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{11} \approx 0,53, \quad f_{d2} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{39}}{2} \approx 0,50,$$

dve različni krožni frekvenci nihanja,

$$\omega_{d1} = \sqrt{11} \approx 3,32, \quad \omega_{d2} = \frac{\sqrt{39}}{2} \approx 3,12,$$

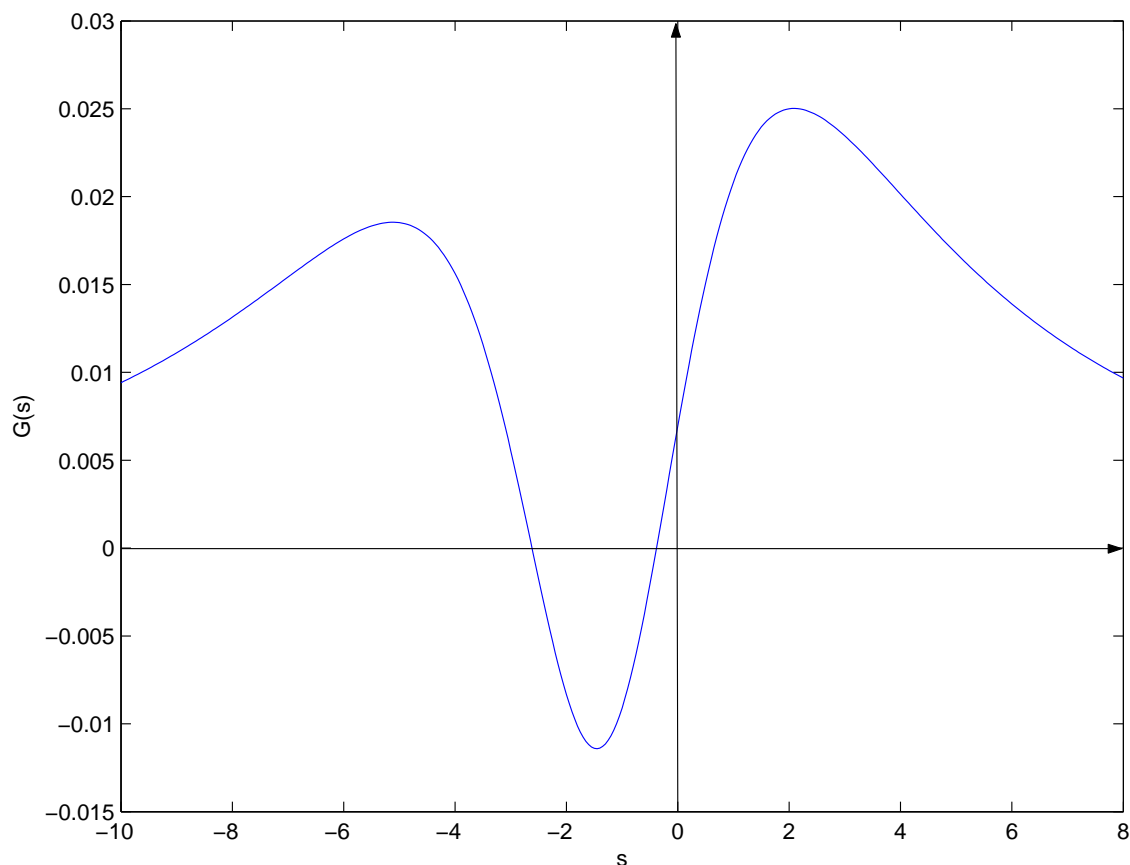
ter eno samo lastno frekvenco nihanja

$$\omega_n = \sqrt{12} \approx 3,46.$$

Ojačenje sistema pa je

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 3s + 1}{(s^2 + 2s + 12)(s^2 + 3s + 12)} = \frac{1}{12 \cdot 12} = \frac{1}{144} \approx 0,007.$$

Graf prenosne funkcije $G(s)$ prikazuje spodnja slika:



2. [OSNOVE ELEKTROTEHNIKE] Časovni potek električnega toka je podan s funkcijo

$$I(t) = \hat{I} \cos(\omega t),$$

časovni potek napetosti na kondenzatorju pa s funkcijo

$$U_C(t) = \hat{U}_C \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

kjer je $\hat{I} = 2A$, $\hat{U}_C = 15V$ in $\omega = 200s^{-1}$. Narišite grafa obeh funkcij časa.

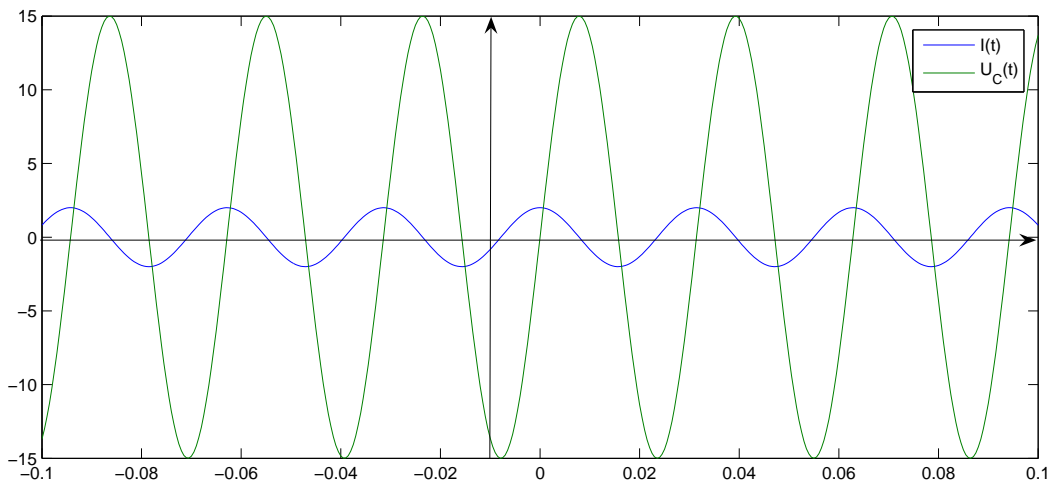
REŠITEV:

- 3.

5 INTEGRALI

1. [OBDELAVA SIGNALOV] Signale, ki nas obdajajo v prostoru in času, lahko teoretično predstavimo ko t realno (ali kompleksno) funkcijo ene realne spremenljivke (običajno časa). Energija signala $f(t)$ na končnem časovnem intervalu (t_1, t_2) je definirana kot

$$E_f(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt.$$



Povprečno moč signala $f(t)$ na časovnem intervalu (t_1, t_2) pa izračunamo kot

$$P_f(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} E_f(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt.$$

Izračunajte energijo in povprečno moč signala $f(t) = \sin 3t$ na intervalu $(0, 5)$.

REŠITEV:

$$E_f(0, 5) = \int_0^5 \sin^2 3t dt = \int_0^5 \frac{1 - \cos 6t}{2} dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{6} \sin 6t \right]_0^5 = \frac{5}{2} - \frac{1}{12} \sin 30 \approx 2,58$$

$$P_f(0, 5) = \frac{1}{5} E_f(0, 5) \approx 0,52$$

2. [OBDELAVA SIGNALOV] Energija signala $f(t)$ na celotnem časovnem intervalu je definirana kot

$$E_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt.$$

Če limita obstaja in je končna ($E_f < \infty$), imenujemo signal $f(t)$ *energijski*. Povprečno moč signala $f(t)$ na celotnem časovnem intervalu pa izračunamo kot

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt.$$

Če limita obstaja in je končna ter pozitivna ($0 < P_f < \infty$), imenujemo signal $f(t)$ *močnosten*.

Izračunajte energijo in povprečno moč naslednjih signalov:

a.) $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

b.) $g(t) = e^{\alpha t}$, kjer je α poljubno kompleksno število

Kateri signal je energijski? Kateri signal je močnosten?

Kakšna je povprečna moč energijskega signala?

REŠITEV:

a.) Signal $f(t)$ je energijski, ni pa močnosten:

$$E_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} [e^{-2t}]_0^T = -\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} [e^{-2T} - 1] = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P_f &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [e^{-2t}]_0^T = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [e^{-2T} - 1] = 0 \end{aligned}$$

b.) Signal $g(t)$ je energijski, če je realna komponenta α negativna, in močnosten, če je α čisto imaginarno število:

$$\begin{aligned} E_g &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |e^{\alpha t}|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{(\alpha_1 + i\alpha_2)t} e^{(\alpha_1 - i\alpha_2)t} dt = \\ &\quad \downarrow \text{če } \alpha_1 \neq 0 \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{2\alpha_1 t} dt = \frac{1}{2\alpha_1} \lim_{T \rightarrow \infty} [e^{2\alpha_1 t}]_{-T}^T = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\alpha_1} \lim_{T \rightarrow \infty} (e^{2\alpha_1 T} - e^{-2\alpha_1 T}) = \frac{1}{2\alpha_1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{4\alpha_1 T} - 1}{e^{2\alpha_1 T}} =$$

$$= \frac{1}{2\alpha_1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4\alpha_1 e^{4\alpha_1 T}}{2\alpha_1 e^{2\alpha_1 T}} = \frac{1}{\alpha_1} \lim_{T \rightarrow \infty} e^{2\alpha_1 T} = \begin{cases} \infty, & \text{če } \alpha_1 \geq 0 \\ 0, & \text{če } \alpha_1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_g &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{(\alpha_1 + i\alpha_2)t} e^{(\alpha_1 - i\alpha_2)t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{2\alpha_1 t} dt = \\ &\quad \downarrow \text{če } \alpha_1 \neq 0 \\ &= \frac{1}{2\alpha_1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (e^{2\alpha_1 T} - e^{-2\alpha_1 T}) = \frac{1}{2\alpha_1} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{2\alpha_1 T}}{2T} - \frac{e^{-2\alpha_1 T}}{2T} \right) = \infty \end{aligned}$$

Torej, za $\alpha_1 \neq 0$ signal $g(t)$ ni močnosten. Ko je $\alpha_1 = 0$, pa dobimo

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} 2T = 1$$

in $g(t)$ je močnosten.

Povprečna moč signala, ki je energijski, je enaka 0:

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_f}{2T} = E_f \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} = 0.$$

3. [OBDELAVA SIGNALOV] V postopkih obdelave signalov pogosto uporabljamo približke dejanskih signalov. Razlogi so lahko različni – velika numerična zahtevnost določanja amplitud originalnega signala, originalni signal ne poseduje zahtevanih analitičnih lastnosti (npr. zveznost ali odvedljivost), ki so potrebne za izvedbo

določenega postopka, z uvedbo približka želimo poudariti nekatere specifične fizikalne lastnosti signala. Približek največkrat sestavimo iz več vnaprej podanih funkcij, imenovanih *temeljne funkcije*. Določiti približek $\tilde{x}(t)$ signala $x(t)$ s končno energijo na omejenem časovnem intervalu (t_1, t_2) , tako da minimiramo *srednjo kvadratno napako*

$$\overline{\epsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - \tilde{x}(t)|^2 dt,$$

pomeni minimirati povprečno moč signala napake $\epsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$.

Naj bosta $\tilde{x}_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$ in $\tilde{x}_2(t) = \frac{4}{\pi} \cos t$ dva približka signala

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq \pi \\ -1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

na časovnem intervalu $(0, 2\pi)$. Kateri izmed približkov je boljši? Določite vrednosti srednjih kvadratnih napak.

REŠITEV:

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon_1^2(t)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(t) - \tilde{x}_1(t)|^2 dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi \left| 1 - \frac{4}{\pi} \sin t \right|^2 dt + \int_\pi^{2\pi} \left| -1 - \frac{4}{\pi} \sin t \right|^2 dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{8}{\pi} \sin t + \frac{16}{\pi^2} \sin^2 t \right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \left(1 + \frac{8}{\pi} \sin t + \frac{16}{\pi^2} \sin^2 t \right) dt = \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \approx 0,19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon_2^2(t)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(t) - \tilde{x}_2(t)|^2 dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi \left| 1 - \frac{4}{\pi} \cos t \right|^2 dt + \int_\pi^{2\pi} \left| -1 - \frac{4}{\pi} \cos t \right|^2 dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{8}{\pi} \cos t + \frac{16}{\pi^2} \cos^2 t \right) dt + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \left(1 + \frac{8}{\pi} \cos t + \frac{16}{\pi^2} \cos^2 t \right) dt = \\ &= 1 + \frac{8}{\pi^2} \approx 1,81 \end{aligned}$$

Srednja kvadratna napaka prvega približka je manjša od srednje kvadratne napake drugega približka, kar pomeni, da je prvi približek boljši od drugega.

Ali je napaka "velika"? Velikost napake, ki predstavlja povprečno moč signala napake $\epsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ na intervalu, kjer določamo približek, je smiselno primerjati s povprečno močjo P_x signala $x(t)$:

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1.$$

Srednja kvadratna napaka prvega (boljšega) približka torej predstavlja približno 19% povprečne moči signala $x(t)$. Drugi približek ni zadovoljiv, saj je povprečno moč signala napake $\epsilon_2(t) = x(t) - \tilde{x}_2(t)$ skoraj dvakrat tolikšna kot povprečna moč P_x originalnega signala.

4. [OBDELAVA SIGNALOV] Frekvenčna oz. spektralna predstavitev periodičnega signala imenujemo zapis periodičnega signala s *Fourierjevo vrsto*, tj. z neskončno vsoto sinusnih nihanj s frekvencami $n\omega_0$, kjer je

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

krožna frekvenca, n celo število, T pa perioda signala. Sinusno nihanje predstavlja osnovni model nihanja, ki ga zasledimo v naravi. Z njim lahko na primer opišemo nihanje matematičnega nihala ali nihanje, ki ga dosežemo z električnim vezjem nihajnega kroga.

Kompleksna Fourierjeva vrsta periodičnega signala $f(t)$ s periodo T_0 je enaka

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n)e^{in\omega_0 t},$$

kjer vrednosti koeficientov $F(n)$ določimo po pravilu

$$F(n) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Ker so tako signal $f(t)$ kot temeljne funkcije $e^{-in\omega_0 t}$ periodične funkcije s periodo T , izbira spodnje meje t_1 integrala ne vpliva na vrednost $F(n)$ in je zato poljubna.

Koeficienti $F(n)$ so v splošnem kompleksni, tudi če je $f(t)$ realen, zato jih lahko zapišemo kot

$$F(n) = P(n) + iQ(n),$$

kjer $P(n)$ imenujemo *realni spekter*, $Q(n)$ pa *imaginarni spekter*.

Določite kompleksno Fourierjevo vrsto, realni ter imaginarni spekter signala $f(t)$, ki je na intervalu $(0, 2\pi)$ enak $\frac{At}{2\pi}$ ($A > 0$) in je periodičen s periodo $T = 2\pi$.

REŠITEV: Najprej izračunajmo Fourierjeve koeficiente:

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{At}{2\pi} e^{-int} dt = \frac{A}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} t e^{-int} dt = \frac{A}{4\pi^2} \left(\frac{i}{n} t e^{-int} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{i}{n} e^{-int} dt \right) = \\ &= \frac{A}{4\pi^2} \left(\frac{2\pi i}{n} + \frac{1}{n^2} e^{-int} \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{Ai}{2\pi n} \\ F(0) &= \frac{A}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} t dt = \frac{A}{4\pi^2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{A}{2} \\ P(n) &= \begin{cases} \frac{A}{2}, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \\ Q(n) &= \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{A}{2\pi n}, & n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Fourierjeva vrsta je sedaj enaka

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n)e^{int} = \frac{A}{2} + \frac{Ai}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{int} = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt.$$

5. [RAZPOZNAVANJE GOVORA] Če iste govorne posnetke digitaliziramo na dveh ločenih računalniških sistemih, pride do problema sinhronizacije posnetkov – v digitalnih zapisih posameznih posnetkov se pojavijo nepredvidljivi časovni zamiki. Detekcija začetka govora na osnovi povečane energije in podobnih parametrov se je izkazala za nezanesljivo zaradi vpliva šuma in možnosti, da se na začetku govora pojavijo glasovi z relativno majhno glasnostjo. Tako na primer glasova f in h , ki ju izgovorimo v osami, zlahka zamenjamo z zvokom, ki ga ustvarimo z malo močnejšim dihanjem ali kakšno drugo šibko izraženo akustično motnjo.

Poravnavo dveh hkrati zajetih signalov lahko zelo zanesljivo izvedemo z uporabo *križne korelacije*, ki je globalno odvisna od poteka obeh signalov. Potrebno zakasnitev za uskladitev poteka signalov namreč zelo natančno določa časovni zamik τ_{max} , kjer je vrednost križne korelacije največja. Križna korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$ neperiodičnih signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ je določena z izrazom

$$\varphi_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt.$$

Če sta signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ energijska signala, njuna križna korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$ obstaja za vsak τ in je neperiodičen signal.

Izračunajte križni korelaciji $\varphi_{12}(\tau)$ in $\varphi_{21}(\tau)$ signalov

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

in

$$f_2(t) = \begin{cases} 2 - t, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{drugod} \end{cases},$$

narišite njun graf ter določite τ , pri katerem dosežeta maksimum.

REŠITEV:

Ločiti je treba tri možnosti:

- $\tau \leq 1$: Ko je $0 \leq \tau \leq 1$, premaknemo graf funkcije $f_2(t)$ za τ v levo. Ko je $\tau < 0$, premaknemo graf funkcije $f_2(t)$ za $|\tau|$ v desno. V obeh primerih leži interval, na katerem je funkcija $f_2(t + \tau)$ neničelna, znotraj intervala, na katerem je funkcija $f_1(t)$ neničelna. Velja

$$f_1(t)f_2(t + \tau) = \begin{cases} e^{-t}(2 - (t + \tau)), & 1 - \tau \leq t \leq 2 - \tau \\ 0, & \text{drugod} \end{cases}$$

in križna korelacija pri pogoju $\tau \leq 1$ je enaka

$$\begin{aligned}\varphi_{12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t+\tau) dt = \int_{1-\tau}^{2-\tau} e^{-t}(2-(t+\tau)) dt = \\ &= -(2-t-\tau)e^{-t} \Big|_{1-\tau}^{2-\tau} - \int_{1-\tau}^{2-\tau} e^{-t} dt = e^{\tau-2}.\end{aligned}$$

$1 < \tau < 2$: Ko je $1 < \tau < 2$, premaknemo graf funkcije $f_2(t)$ za τ v levo. V tem primeru se interval, na katerem je funkcija $f_2(t+\tau)$ neničelna, le delno prekriva z intervalom, na katerem je funkcija $f_1(t)$ neničelna. Velja

$$f_1(t)f_2(t+\tau) = \begin{cases} e^{-t}(2-(t+\tau)), & 0 \leq t \leq 2-\tau \\ 0, & \text{drugod} \end{cases}$$

in križna korelacija pri pogoju $1 < \tau < 2$ je enaka

$$\begin{aligned}\varphi_{12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t+\tau) dt = \int_0^{2-\tau} e^{-t}(2-(t+\tau)) dt = \\ &= -(2-t-\tau)e^{-t} \Big|_0^{2-\tau} - \int_0^{2-\tau} e^{-t} dt = e^{\tau-2} - \tau + 1.\end{aligned}$$

$\tau \geq 2$: Ko je $\tau \geq 2$, premaknemo graf funkcije $f_2(t)$ za τ v levo. V tem primeru imata interval, na katerem je funkcija $f_2(t+\tau)$ neničelna, in interval, na katerem je funkcija $f_1(t)$ neničelna, prazen presek. To pomeni, da je $f_1(t)f_2(t+\tau) = 0$ in križna korelacija pri pogoju $\tau \geq 2$ je enaka $\varphi_{12}(\tau) = 0$.

Izračunali smo križno korelacijo

$$\varphi_{12}(\tau) = \begin{cases} e^{\tau-2}, & \tau \leq 1 \\ e^{\tau-2} - \tau + 1, & 1 < \tau < 2 \\ 0, & \tau \geq 2 \end{cases}.$$

Križno korelacijo $\varphi_{21}(\tau)$ lahko izračunamo z uporabo osnovnih pravil za integriranje (uvredba nove spremenljivke $u = t + \tau$ v integral):

$$\varphi_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)f_1(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)f_2(u-\tau) du = \varphi_{12}(-\tau).$$

Torej

$$\varphi_{21}(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau-2}, & -\tau \leq 1 \\ e^{-\tau-2} + \tau + 1, & 1 < -\tau < 2 \\ 0, & -\tau \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\tau-2}, & \tau \geq -1 \\ e^{-\tau-2} + \tau + 1, & -2 < \tau < -1 \\ 0, & \tau \leq -2 \end{cases}.$$

Križni korelaciji dosežeta maksimum pri $\tau = 1$ oz. $\tau = -1$.

