Matematika 1

4. vaja

B. Jurčič Zlobec[1]

[1] Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Matematika 1 FE, Ljubljana, Slovenija 23. oktober 2012

Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije $f(x)$

$f(x) = 1 - |x|$.

- Funkcija je definirana za vsak $x \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Funkcija je odsekoma linearna in soda, ekstrem ima v 0.
- $\mathcal{R}_f = (-\infty, 1]$.

Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije $f(x)$

$f(x) = 1 - x^2$

- Funkcija je definirana za vsak $x \in \mathbb{R}$,
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Funkcija je kvadratna, ekstrem ima v točki 0, kjer zavzame vrednost 1.
- $\mathcal{R}_f = (-\infty, 1]$.

Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije $f(x)$

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

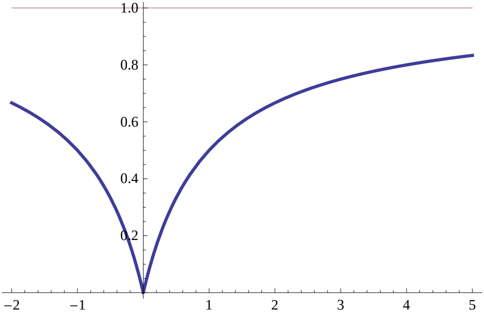
- Funkcija je definirana povsod tam, kjer je $1 - x^2 \geq 0$.
- $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$.
- Podobno kot funkcija $f(x) = 1 - x^2$ zavzame ekstrem (maksimum) v točki 0.
- $\mathcal{R}_f = [0, 1]$.

Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije $f(x)$

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$$

- $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{1-x}, x < 0 \\ \frac{x}{1+x}, 0 \leq x \end{cases}$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.
- Soda funkcija definirana za vse x, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Velja $0 \leq \frac{|x|}{1+|x|} < 1$,
- $\mathcal{R}_f = [0, 1)$.

Graf funkcije $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$

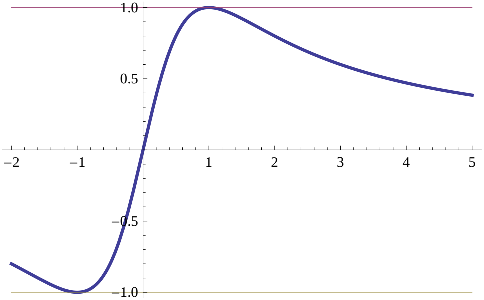


Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije $f(x)$

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

- Funkcija je liha omejena in definirana za vsak realen x.
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Zaloga vrednosti je med $[-a, a]$, kjer je a pozitivna vrednost za katero ima kvadratna enačba $\frac{2x}{1+x^2} = a$ dvojno ničlo.
- $-ax^2 + 2x - a = 0$. Diskriminanta je enaka 0. $4 - 4a^2 = 0$, od tod je iskani $a = 1$,
- $\mathcal{R}_f = [-1, 1]$.

Graf funkcije $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

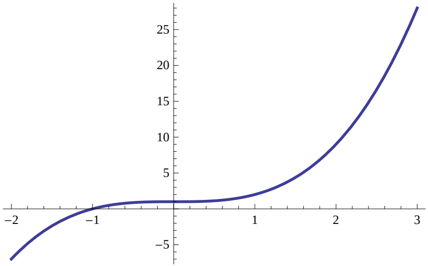


Ugotovi lastnosti funkcije, kot preslikave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 1 + x^3$

- Funkcija je definirana za vse $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Zaloga vrednosti je $\mathcal{R} = \mathbb{R}$.
- Velja $1 + x^3 = y \to x^3 = y - 1 \to x = \operatorname{sign}(y-1)\sqrt[3]{|y-1|}$.
- Torej ima enačba $f(x) = y$ natanko eno realno rešitev za vsak $y \in \mathbb{R}$.
- Odtod sledi, da je funkcija je bijektivna preslikava $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Graf funkcije $f(x) = 1 + x^3$

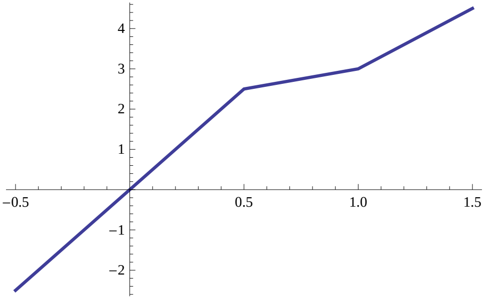


Ugotovi lastnosti funkcije, kot preslikave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 4x + |1 - x| - |1 - 2x|$

- $f(x) = \begin{cases} 5x, x < \frac{1}{2} \\ x + 2, \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 3x, 1 \leq x \end{cases}$
- Funkcija je na vsem $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ monotono naraščajoča in $\mathcal{R} = \mathbb{R}$.
- Funkcija je bijektivna preslikava.

Graf funkcije $f(x) = 4x + |1 - x| - |1 - 2x|$

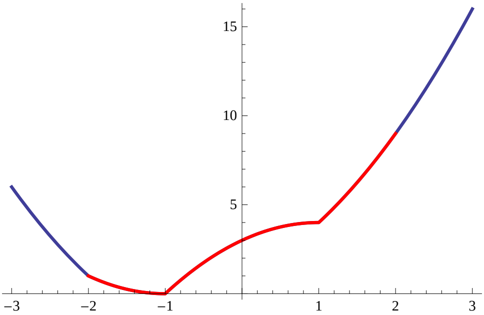


Določi sliko množice $\mathcal{A}$, $f(\mathcal{A})$, če je:

$f(x) = |x^2 - 1| + |x + 2| + x$, $\mathcal{A} = (-2, 2)$

- Razdelimo realno os na območja glede na predznake izrazov pod absolutnimi vrednostmi.
- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, x < -2 \\ x^2 + 2x + 1, -2 \leq x < -1 \\ -x^2 + 2x + 3, -1 \leq x < 1 \\ x^2 + 2x + 1, 1 \leq x \end{cases}$
- Narišemo graf in ugotovimo, da je $f((-2, 2)) = [0, 9)$.

Graf funkcije $f(x) = |x^2 - 1| + |x + 2| + x$

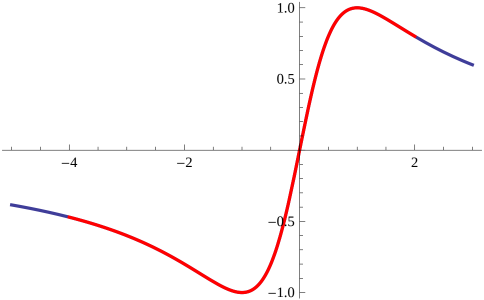


Določi sliko množice $\mathcal{A}$, $f(\mathcal{A})$, če je:

$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $\mathcal{A} = (-4, 2)$.

- Funkcija je liha in zavzame maksimalno vrednost a, kjer ima kvadratna enačba $\frac{2x}{1+x^2} = a$ dvojno ničlo.
- Diskriminanta je enaka $4 - 4a^2 = 0$, od tod je $a = 1$.
- Maksimalno vrednost zavzame v točki $x = 1$, ker je liha zavzame minimalno vrednost -1 v točki $x = -1$. Od tod sledi, da je $f((-4, 2)) = [-1, 1]$.

Graf funkcije $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

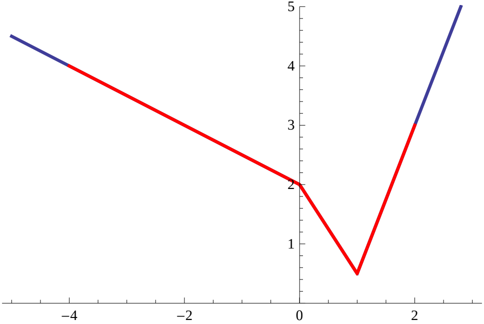


Določi sliko množice $\mathcal{A}$, $f(\mathcal{A})$, če je:

$f(x) = x + 2|1 - x| - |x|/2$, $\mathcal{A} = (-4, 2)$.

- Razdelimo realno os na območja glede na znak izrazov pod absolutnimi vrednostmi.
- $f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}x, x < 0 \\ 2 - \frac{3}{2}x, 0 \leq x < 1 \\ -2 + \frac{7}{2}x, 1 \leq x \end{cases}$
- Narišemo graf in ugotovimo, da je $f((-4, 2)) = [\frac{1}{2}, 4)$.

Graf funkcije $f(x) = x + 2|1 - x| - |x|/2$



Kompozitum funkcij

- Dani sta funkciji $f(x)$ z $\mathcal{D}_f$ in $\mathcal{R}_f$, ter $g(x)$ z $\mathcal{D}_g$ in $\mathcal{R}_g$.
- Definicijsko območje $g(f(x))$, $\mathcal{D}_{g \circ f}$ je podmnožica $\mathcal{D}_f$, ki se s funkcijo $f(x)$ preslika v $\mathcal{R}_f \cap \mathcal{D}_g$,
  $f(\mathcal{D}_{g \circ f}) = \mathcal{R}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- Zaloga vrednosti $\mathcal{R}_{g \circ f}$ je podmnožica
  $\mathcal{R}_g$, v katero se s funkcijo $g(x)$ preslika $\mathcal{R}_f \cap \mathcal{D}_g$,
  $\mathcal{R}_{g \circ f} = g(\mathcal{R}_f \cap \mathcal{D}_g)$.

Določi kompozituma $f(g(x))$ in $g(f(x))$ če je:

$f(x) = \frac{1}{x}$ in $g(x) = \operatorname{sign}(2 - x)$.

- $f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ -\frac{1}{x}, x \in (2, \infty) \end{cases}$
- $g(f(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \\ 0, x \in \{\frac{1}{2}\} \\ -\frac{1}{x}, x \in (\frac{1}{2}, \infty) \end{cases}$

Določi kompozituma $f(g(x))$ in $g(f(x))$ če je:

$f(x) = \sqrt{x}$ in $g(x) = x^2$.

- $f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$,
- $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{f \circ g} = [0, \infty)$.
- $g(f(x)) = \sqrt{x}^2 = x$,
- $\mathcal{D}_{g \circ f} = [0, \infty)$, $\mathcal{R}_{g \circ f} = [0, \infty)$.

Določi kompozituma $f(g(x))$ in $g(f(x))$ če je:

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ in $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

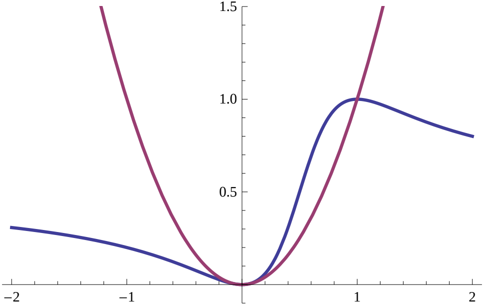
- $f(g(x)) = 1 + \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{1+x}$.
- $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- $\mathcal{R}_{f_\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- $g(f(x)) = \frac{1+1+\frac{1}{x}}{1-1-\frac{1}{x}} = -2x - 1$.
- $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\mathcal{R}_{g_\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Določi kompozituma $f(g(x))$ in $g(f(x))$ če je:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in $g(x) = \frac{1-x}{x}$.

- $f(g(x)) = \frac{x^2}{1-2x+2x^2}$.
- $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Dvojna rešitev enačbe $\frac{x^2}{1-2x+2x^2} = a \to a \in \{0, 1\}$.
- $\mathcal{R}_{f \circ g} = (0, 1]$.
- $g(f(x)) = x^2$.
- $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{g \circ f} = [0, \infty]$

Grafa funkcij $f(g(x))$ in $g(f(x))$



Določi kompozituma $f(g(x))$ in $g(f(x))$ če je:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

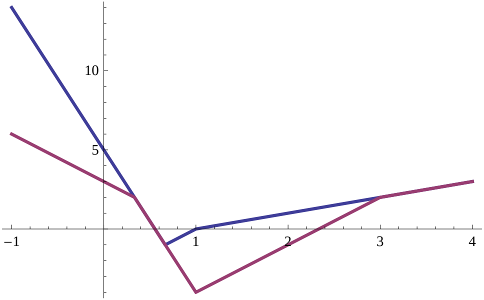
- $f(g(x)) = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = x$.
- $\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathcal{D}_g = (0, 1]$, $\mathcal{R}_{f\circ g} = (0, 1]$.
- $g(f(x)) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}}} = \sqrt{x^2} = |x|$.
- $\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{g\circ f} = [0, \infty)$

Določi kompozituma $f(g(x))$ in $g(f(x))$ če je:

$f(x) = -x + 2|1 - x|$ in $g(x) = 2x - |x - 1|$.

- $f(g(x)) = \begin{cases} 5 - 9x, x \in (-\infty, \frac{1}{3}] \\ -3 + 3x, x \in [\frac{1}{3}, 1) \\ -1 + x, x \in [1, \infty) \end{cases}$
- $g(f(x)) = \begin{cases} 3 - 3x, x \in (-\infty, \frac{1}{3}] \\ 5 + 9x, x \in [\frac{1}{3}, 1) \\ 7 + 3x, x \in [1, 3) \\ -1 + x, x \in [3, \infty) \end{cases}$

Grafa funkcij $f(g(x))$ in $g(f(x))$



Inverzna funkcija

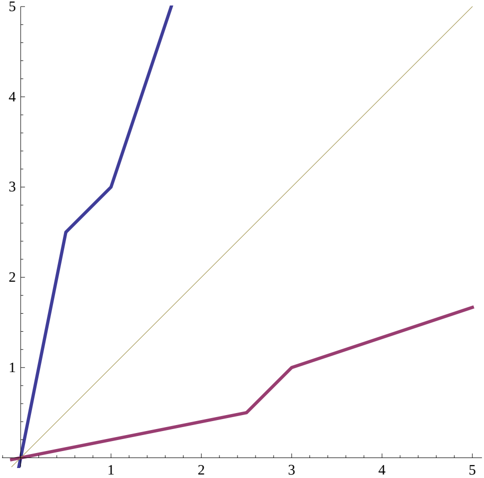
- Dana je obratno enolična funkcija $f(x)$ z definicijskim območjem $\mathcal{D}_f$ in zalogo vrednosti $\mathcal{R}_f$.
- Njej inverzna funkcija $f^{-1}(x)$ je definirana s predpisom $x = f(y)$, $y = f^{-1}(x)$.
- Definicijsko območje $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$.
- Zaloga vrednosti $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.
- Graf inverzne funkcije je simetričen grafu prvotne funkcije, os simetrije je $y = x$.

Poišči inverzno funkcijo k funkciji $f(x)$

$f(x) = 4x + |1 - x| - |1 - 2x| \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

- Funkcija je odsekoma linearna sestavljena iz treh delov.
- $f_1(x) = 5x$, $\mathcal{D}_1 = (-\infty, \frac{1}{2})$, $\mathcal{R}_1 = (-\infty, \frac{5}{2})$
- $f_2(x) = x + 2$, $\mathcal{D}_2 = [\frac{1}{2}, 1)$, $\mathcal{R}_2 = [\frac{5}{2}, 3)$
- $f_3(x) = 3x$, $\mathcal{D}_3 = [1, \infty)$, $\mathcal{R}_3 = [3, \infty)$
- Inverzna funkcija
- $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x, x \in (-\infty, \frac{5}{2}] \\ x - 2, x \in [\frac{5}{2}, 3) \\ \frac{1}{3}x, x \in [3, \infty) \end{cases}$

Grafa $f(x)$ in $f^{-1}(x)$

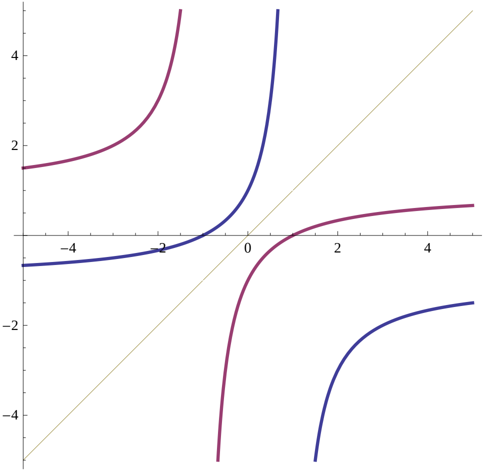


Poišči inverzno funkcijo k funkciji $f(x)$

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

- Predpis $f^{-1}(x)$ je določen z enačbo $x = \frac{1+y}{1-y}$.
- Izrazimo y iz gornje enačbe in dobimo:
- $x(1-y) = y+1 \to y(-x-1) = -x+1, \to y = \frac{-x+1}{-x-1}$
- $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{1+x}, \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Grafa $f(x)$ in $f^{-1}(x)$

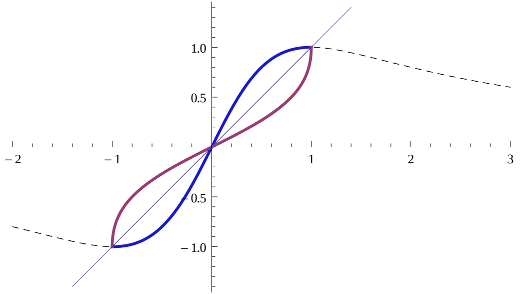


Poišči inverzno funkcijo k funkciji $f(x)$

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \mathcal{D}_f = [-1, 1].$$

- Predpis $f^{-1}(x)$ je določen z enačbo $x = \frac{2y}{1+y^2}$.
- Izrazimo y iz gornje enačbe. Od dveh rešitev vzamemo tisto, ki je omejena v okolici 0.
- $x(1+y^2) = 2y \to xy^2 - 2y + x = 0, \to y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4x^2}}{2x}$.
- $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$
- $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [-1, 1]$

Grafa $f(x)$ in $f^{-1}(x)$

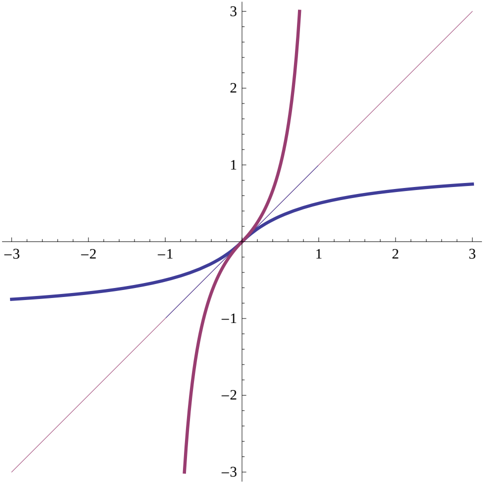


Poišči inverzno funkcijo k funkciji $f(x)$

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

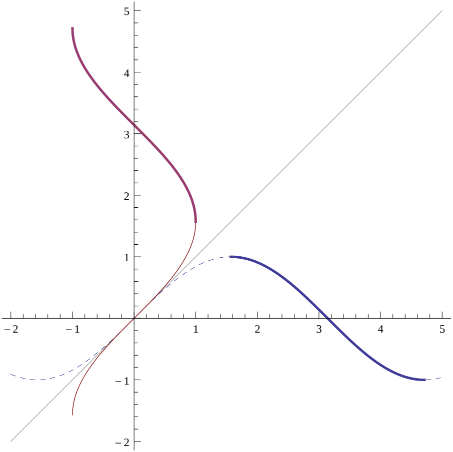
- $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, x < 0 \\ \frac{x}{1+x}, x \geq 0 \end{cases}$
- $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, x < 0 \\ \frac{x}{1-x}, x \geq 0 \end{cases}$
- $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}, \mathcal{D}_{f^{-1}} = (-1, 1), \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

Grafa $f(x)$ in $f^{-1}(x)$



Poišči inverzno funkcijo k funkciji $f(x)$.

$$f(x) = \sin(x), \quad \mathcal{D}_f = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$$



$f^{-1}(x) = \pi - \arcsin(x)$, $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [-1, 1]$ in $\mathcal{R}_{f^{-1}} = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.