Rešitve izpita matematike 1
4. junij 1996

1. Ali sta vrsti $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \ldots$ in $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n} + \ldots$ konvergentni? Utemeljite!

   - Prva divergira, velja ocena $|\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}|$.

   - Druga je alternirajoča, členi po absolutni vrednosti monotono padajo in limita splošnega člena je enaka nič. Vrsta konvergira. Ker absolutno ne konvergira, konvergira pogojno.

2. Izračunaj limito funkcije $f(x) = \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{x\sin x}$, ko gre x proti nič.

   - $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{4}$

3. Določite ničle, ekstreme in asimptote funkcije $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+x}$
   Narišite graf funkcije.

   - ničle: 1, 2
   - minimum: $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
   - maksimum: $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

4. Navedite Rolleov in Lagrangeov izrek. Uporabite ju pri funkciji $f(x) = x^2 - 3x + 3$, prvega na intervalu $[1, 2]$ in drugega na intervalu $[0, 1]$.

   - Rolle: $f(1) = f(2) = 1$, $\exists x_0 : f'(x_0) = 0$, $x_0 = \frac{3}{2}$
   - Lagrange: $\exists x_0$, $f'(x_0) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = -2 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$

5. Izračunajte integral $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

   - $\int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)} = \left[-\frac{1}{x} + \ln(x+1) - \ln x\right]_1^2 = \frac{1}{2} - \ln 3 - 2\ln 2$