REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Izračunajte

$$(-2i)^{\frac{1}{3}}.$$

Naj bo

$$(-2i)^{\frac{1}{3}} = z,$$

kjer je $z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ *iskano kompleksno število. Enačbo potencirajmo s 3, da dobimo*

$$-2i = z^3.$$

Levo in desno stran dobljene enačbe zapišimo v polarni obliki:

$$-2i = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}),$$

$$z^3 = r^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi).$$

Sledi

$$2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = r^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi)$$

in zato

$$r^3 = 2,$$

$$3\phi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2.$$

Dobimo:

$$r = \sqrt[3]{2},$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi,\ k = 0, 1, 2,$$

$$z = \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi)),\ k = 0, 1, 2.$$

Rešitev so torej tri kompleksna števila:

$$z_0 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i\sqrt[3]{2},$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}).$$

Naloga 2 (20 točk)

Pokažite, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

konvergentna in izračunajte njeno vsoto.

NAMIG: Pri izračunu vsote vrste zapišite splošni člen vrste kot razliko ulomkov.

Ocenimo

$$\frac{2}{n(n+1)} \leq \frac{2}{n^2} \quad \textit{za vsa naravna števila.}$$

Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ki je majoranta za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$, *konvergira, saj je stopnja imenovalca splošnega člena vrste večja od ena:* $\alpha = 2 > 1$. *Sledi, tudi vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ *konvergira.*

Splošni člen $\frac{2}{n(n+1)}$ *vrste razcepimo na parcialne ulomke:*

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}.$$

Izenačimo števca dobljenih ulomkov,

$$2 = A(n+1) + Bn = An + A + Bn,$$

in primerjajmo koeficiente pri istih potencah spremenljivke n:

koeficient pri n: $0 = A + B$
koeficient pri n^0: $2 = A$

Rešitev sistema dveh linearnih enačb za dve neznanki je: $A = 2,\ B = -2$. *Sledi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 2\big((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots\big) = 2.$$

Naloga 3 (20 točk)

Poiščite vse lokalne minimume in lokalne maksimume funkcije

$$f(x) = \arctan(\cos x).$$

Poiščimo stacionarne točke funkcije $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = 0.$$

Sledi $\sin x = 0$ *in zato*

$$x = k\pi,\ k \in \mathcal{Z}.$$

Z drugim odvodom funkcije določimo naravo (max, min, prevoj) stacionarnih točk:

$$f''(x) = \frac{-\cos x(1+\cos^2 x) + \sin x \cdot (-2\cos x \sin x)}{(1+\cos^2 x)^2} = \frac{\cos x(\cos^2 x - 3)}{(1+\cos^2 x)^2},$$

$$f''(k\pi) = \frac{\cos(k\pi)(\cos^2(k\pi)-3)}{(1+\cos^2(k\pi))^2} = \frac{(-1)^k(1-3)}{(1+1)^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & k \textit{ sod} \\ \frac{1}{2}, & k \textit{ lih} \end{cases}$$

Sledi, funkcija $f(x)$ ima v $x = k\pi$, kjer je k liho celo število, lokalne minimume, v $x = k\pi$, kjer je k sodo celo število, pa lokalne maksimume. Velja:

$$f(k\pi) = \arctan(\cos k\pi) = \arctan((-1)^k) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & k \textit{ lih} \\ \frac{\pi}{4}, & k \textit{ sod} \end{cases}$$

Naloga 4 (20 točk)

Izračunajte posplošeni integral

$$\int_0^\infty e^{-x}(x^2-1)dx.$$

Najprej izračunajmo nedoločeni integral

$$\int e^{-x}(x^2-1)dx.$$

Uporabimo integracijo po delih (per partes):

$$u = x^2 - 1 \implies du = 2xdx$$

$$dv = e^{-x}dx \implies v = -e^{-x}$$

Sledi

$$\int e^{-x}(x^2-1)dx = -e^{-x}(x^2-1) + \int 2xe^{-x}dx.$$

Po ponovni integraciji po delih

$$u = 2x \implies du = 2dx$$

$$dv = e^{-x}dx \implies v = -e^{-x}$$

dobimo rezultat

$$\int e^{-x}(x^2-1)dx = -e^{-x}(x^2-1) + (-2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx) = -e^{-x}(x^2+2x+1) + C.$$

Sedaj vstavimo meje:

$$\int_0^\infty e^{-x}(x^2-1)dx = \big[-e^{-x}(x^2+2x+1)\big]_0^\infty = \lim_{x \rightsquigarrow \infty}(-e^{-x}(x^2+2x+1)) - (-1) = 1.$$

Naloga 5 (20 točk)

Del krivulje

$$y = \sqrt{\frac{1 - \ln x}{x}}$$

med $x = 2$ in $x = e$ zavrtimo okrog osi x. Izračunajte volumen nastale vrtenine.

Volumen vrtenine izračunamo takole:

$$V = \pi \int_2^e y^2 dx = \pi \int_2^e \frac{1 - \ln x}{x} dx = \pi \int_{\ln 2}^1 (1-u) du = \pi \big[u - \frac{u^2}{2}\big]_{\ln 2}^1 = \pi(\frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{\ln^2 2}{2}).$$

Uvedli smo novo spremenljivko: $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x}\, dx$. *Pri tem so se meje integrala spremenile:*

$$x = 2 \implies u = \ln 2,$$

$$x = e \implies u = \ln e = 1.$$