

IZPIT IZ MATEMATIKE 1

Univerzitetni študij

4. junij 2007

1. Reši enačbo

$$z^3 = -2 + 2i.$$

Rešitev:

Zapišemo levo in desno stran enačbe v polarni obliki.

Velja: $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ oz. $z^3 = |z|^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$.

Ker je $r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ in $\psi = \operatorname{arctg} \frac{-2}{2} = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, je $-2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$.

Sledi:

$$|z|^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enak radij in enak kot. Zato rešimo enačbi: $|z|^3 = 2\sqrt{2}$ in $\cos 3\varphi = \cos \frac{3\pi}{4}$. Prva ima rešitev $|z| = \sqrt{2}$, druga pa $3\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, torej $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

Dobimo tri kote: $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_1 = \frac{11\pi}{12}$ in $\varphi_2 = \frac{19\pi}{12}$. Ti nam dajo tri rešitve po formuli $w_k = |z|(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$, $k = 0, 1, 2, 3$:

$$w_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i,$$

$$w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right),$$

$$w_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

2. Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - 1+x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1 \end{aligned}$$

3. Določi parameter a tako, da se bosta tangenti v točki $x = 1$ na grafa polinomov $y = x^3 + ax^2 + 2x - 3$ in $y = 2x^2 - x - 5$ sekali pod kotom $\frac{\pi}{4}$.

Rešitev:

Odvajamo polinoma in izračunamo smerna koeficienta v dani točki:

$$y' = 3x^2 + 2ax + 2 \Rightarrow k_1 = 5 + 2a,$$

$$y' = 4x - 1 \Rightarrow k_2 = 3.$$

Kot med premicama (tangentama) izračunamo po formuli:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Torej:

$$1 = \left| \frac{3 - 5 - 2a}{1 + 3(5 + 2a)} \right|.$$

Zato je $|16 + 6a| = |-2 - 2a|$, oz. $|8 + 3a| = |1 + a|$.

Rešujemo enačbo z absolutnimi vrednostmi, ki ima dve rešitvi: $a_1 = -\frac{9}{4}$, $a_2 = -\frac{7}{2}$.

4. Izračunaj integral

$$\int \frac{1 + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}x} dx.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}x} dx &= \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} dx \\ &= \int \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)^2} dx \\ &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln |t| = -\frac{1}{2} \ln |1 - \sin 2x| + C \end{aligned}$$

Uvedli smo novo spremenljivko $t = 1 - \sin 2x$ z diferencialom $dt = -2 \cos 2x dx$.

5. Izračunaj dolžino loka krivulje

$$y = \frac{x^2 - 2 \ln x}{4}$$

za $1 \leq x \leq e$.

Rešitev:

Dolžino loka izračunamo po formuli:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Odvajamo:

$$y' = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

in dobimo

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{4x^2}} = \frac{x^2 + 1}{2x}.$$

Torej:

$$s = \int_1^e \frac{x^2 + 1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_1^e + \ln x \Big|_1^e\right) = \frac{e^2 + 1}{4}$$