REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Poiščite kompleksno število u, ki zadošča enačbi

$$(3 - i\sqrt{3})^6 = \frac{1}{2-i}u.$$

Najprej zapišimo kompleksno število $z = 3 - i\sqrt{3}$ v polarni obliki. Ker je $x = 3$ in $y = -\sqrt{3}$, sta polarni koordinati enaki:

$$r = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3},$$

$$\varphi = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{3} = -\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

Polarna oblika je zato:

$$z = 2\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})).$$

Sedaj uporabimo DeMoivreovo formulo in dobimo:

$$z^6 = (3-i\sqrt{3})^6 = (2\sqrt{3})^6(\cos(-6\cdot\frac{\pi}{6}) + i\sin(-6\cdot\frac{\pi}{6})) = 64\cdot 27(\cos\pi - i\sin\pi) = -1728.$$

Sledi

$$-1728 = \frac{1}{2-i}u$$

in

$$u = -1728(2-i) = -3456 + 1728i.$$

Naloga 2 (20 točk)

Za zaporedje s splošnim členom

$$a_n = n^2 - 5n + 2007$$

preverite, da je monotono, določite največji in najmanjši člen (če obstajata) ter supremum in infimum.

Najprej preverimo, da zaporedje od drugega člena naprej monotono narašča:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 5(n+1) + 2007 - (n^2 - 5n + 2007) = 2n - 4 \geq 0 \quad (\text{za } n \geq 2).$$

Velja torej:

$$a_1 \geq a_2 \ \text{ in } \ a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq \cdots$$

Najmanjši člen zaporedja in hkrati infimum je torej

$$\min_{n\geq 1} a_n = \inf_{n\geq 1} a_n = a_2 = 2^2 - 5\cdot 2 + 2007 = 2001.$$

Največji člen ne obstaja, supremum pa je enak

$$\sup_{n\geq 1} a_n = \lim_{n\to\infty}(n^2 - 5n + 2007) = \infty.$$

Naloga 3 (20 točk)

Izračunajte odvod implicitno podane funkcije

$$y^{\sin x} = \ln(x^2 + y^2).$$

Izraz $y^{\sin x}$ *najprej zapišimo v obliki, ki bo primernejša za odvajanje:*

$$y^{\sin x} = e^{\ln y^{\sin x}} = e^{\sin x \ln y}.$$

Odvajajmo:

$$e^{\sin x \ln y}(\cos x \ln y + \sin x \cdot \frac{y'}{y}) = \frac{1}{x^2+y^2}(2x + 2yy').$$

Iz dobljene enačbe je treba le še izraziti odvod y'*:*

$$y'(y^{\sin x}\sin x \cdot \frac{1}{y} - \frac{2y}{x^2+y^2}) = \frac{2x}{x^2+y^2} - y^{\sin x}\cos x \ln y,$$

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+y^2} - y^{\sin x}\cos x \ln y}{y^{\sin x}\sin x \cdot \frac{1}{y} - \frac{2y}{x^2+y^2}},$$

$$y' = \frac{2x - (x^2+y^2)y^{\sin x}\cos x \ln y}{(x^2+y^2)y^{\sin x}\sin x \cdot \frac{1}{y} - 2y}.$$

Naloga 4 (20 točk)

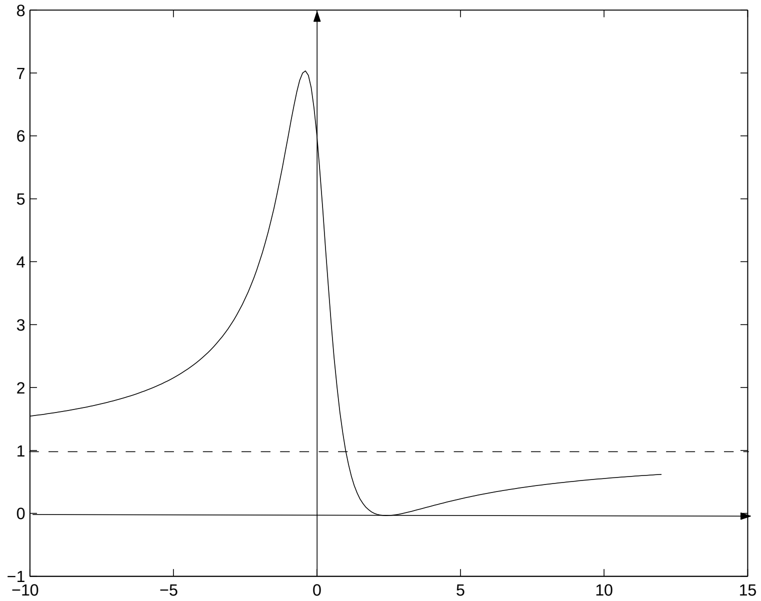
Narišite graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

Določite tudi ničle, pole, začetno vrednost, asimptoto in ekstreme funkcije $f(x)$.

Razcepimo števec in imenovalec v funkcijskem predpisu:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(x-2)(x-3)}{x^2+1}.$$



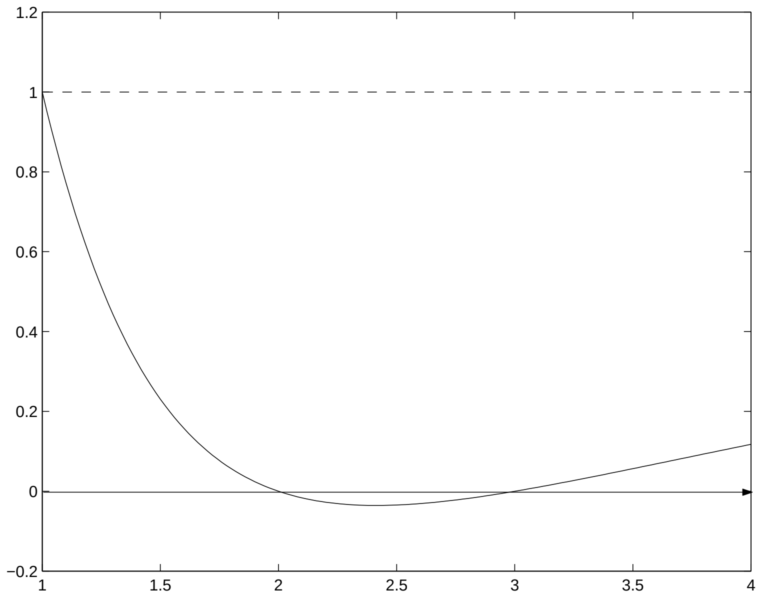
Torej, funkcija $f(x)$ ima dve ničli, to sta $x_1 = 2$ in $x_2 = 3$. Polov nima. Začetna vrednost je enaka $f(0) = 6$. Izračunajmo asimptoto:

$$(x^2 - 5x + 6) : (x^2 + 1) = 1 + \frac{5 - 5x}{x^2 + 1}.$$

Asimptota je torej vodoravna, določena z $y = 1$. Presečišča grafa in asimptote dobimo kot rešitve enačbe

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x^2+1} = 1.$$

Torej, graf funkcije in asimptota se sekata v točki $T(1, 1)$.



Izračunati moramo le še ekstreme funkcije $f(x)$. Kandidati za ekstreme so stacionarne točke, ki jih dobimo kot rešitev enačbe $f'(x) = 0$, tj.

$$f'(x) = \frac{(2x-5)(x^2+1) - 2x(x^2-5x+6)}{(x^2+1)^2} = 0.$$

Torej

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

in stacionarni točki sta dve: $x_3 = 1 + \sqrt{2}$ in $x_4 = 1 - \sqrt{2}$. Ker je iz grafa razvidno, da mora biti v točki $x_3 = 1+\sqrt{2}$ lokalni minimum, v točki $x_4 = 1-\sqrt{2}$ pa lokalni maksimum, drugih odvodov ne bomo računali.

Naloga 5 (20 točk)
Izračunajte nedoločeni integral:

$$\int \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{4 + x^2} + \frac{3x+2}{x^2-1}\right) dx.$$

Prvi ulomek pod integralom najprej zapišemo kot

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{4 + x^2} = x + \frac{1 - 6x}{x^2 + 4}$$

in računamo:

$$\int \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{4 + x^2} + \frac{3x+2}{x^2-1}\right) dx = \int \left(x + \frac{1}{x^2+4} - \frac{6x}{x^2+4} + \frac{3x+2}{x^2-1}\right) dx =$$

$$= \int x\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx - \int \frac{6x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{3x+2}{x^2-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\,dx - \int \frac{3}{t}\,dt + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} - 3\ln|x^2+4| + \frac{5}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

Pri tem smo vpeljali novo spremenljivko $t = x^2 + 4$ z diferencialom $dt = 2x\,dx$ in ulomek $\frac{3x+2}{x^2-1}$ razbili na parcialne ulomke:

$$\frac{3x+2}{x^2-1} = \frac{5}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$