REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Izračunajte

$$(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)^{\frac{2}{3}}.$$

Vpeljimo oznako

$$z=(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)^{\frac{2}{3}}.$$

Po potenciranju s 3 *dobimo enačbo*

$$z^3=(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)^2=\frac{1}{4}(-1+i)^2=-\frac{1}{2}i.$$

Sedaj obe strani enačbe pretvorimo v polarno obliko:

$$r^3(\cos(3\varphi)+i\sin(3\varphi))=\frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})),$$

kjer je $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$*. Sledi*

$$r^3=\frac{1}{2}\quad in\quad 3\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

kjer je $k=0,1,2$*. Torej*

$$r=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\quad in\quad \varphi=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi,\quad k=0,1,2.$$

Iskana kompleksna števila so tri:

$$z=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\big(\cos(-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi)+i\sin(-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi)\big),\quad k=0,1,2.$$

Zapišimo jih še v kartezični obliki:

$$z_0=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\big(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\big)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\big(\sqrt{3}-i\big),$$

$$z_1=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\big(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\big)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,i,$$

$$z_2=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\big(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\big)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\big(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\big)=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\big(-\sqrt{3}-i\big).$$

Naloga 2 (20 točk)

Poiščite n-ti odvod funkcije

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}.$$

NAMIG: Funkcijo zapišite s parcialnimi ulomki.

Racionalno funkcijo $f(x)$ zapišimo s parcialnimi ulomki:

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)}.$$

Ko izenačimo polinoma v števcih, dobimo naslednji sistem linearnih enačb:

$$A + B = 0$$

$$A - B = 1$$

katerega rešitev tvorita $A = \frac{1}{2}$ in $B = -\frac{1}{2}$. Funkcijo $f(x)$ lahko zato zapišemo kot

$$f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}) = \frac{1}{2}((x-1)^{-1} - (x+1)^{-1})$$

in odvajamo:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-(x-1)^{-2} + (x+1)^{-2})$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(2(x-1)^{-3} - 2(x+1)^{-3})$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}(-2\cdot 3(x-1)^{-4} + 2\cdot 3(x+1)^{-4})$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(2\cdot 3\cdot 4(x-1)^{-5} - 2\cdot 3\cdot 4(x+1)^{-5})$$

$$\dots$$

Sledi n-ti odvod

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}((-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)} - (-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)}) = \frac{1}{2}(-1)^n n!(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}).$$

Naloga 3 (20 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{x^4-81}{2(x-1)^2(x+3)}.$$

a.) Poiščite ničle, pole, asimptoto, ekstreme ter narišite graf funkcije $f(x)$.

b.) Poiščite definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije $g(x) = \sqrt{f(x)}$ in skicirajte njen graf.

a.) Najprej razcepimo polinom v števcu:

$$f(x) = \frac{x^4 - 81}{2(x-1)^2(x+3)} = \frac{(x^2-9)(x^2+9)}{2(x-1)^2(x+3)} = \frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{2(x-1)^2(x+3)}.$$

Racionalno funkcijo sedaj zapišemo v skrčeni obliki kot

$$f(x) = \frac{(x-3)(x^2+9)}{2(x-1)^2}.$$

Ničla funkcije $f(x)$, ki je rešitev enačbe $(x-3)(x^2+9) = 0$, je realno število $x_1 = 3$ (1. stopnje).

Funkcija ima en sam pol $x_2 = 1$ (2. stopnje), ki ga dobimo kot rešitev enačbe $2(x-1)^2 = 0$.

Asimptoto dobimo, ko delimo polinom $(x-3)(x^2+9) = x^3 - 3x^2 + 9x - 27$ v števcu s polinomom $2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$ v imenovalcu: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ in ostanek je $6x - 26$. Vidimo, da se graf in asimptota sekata pri $x_3 = \frac{13}{3}$.

Stacionarne točke so rešitve enačbe $f'(x) = 0$. Odvod

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^3 - 3x^2 - 3x + 45)}{4(x-1)^4} = \frac{(x+3)(x^2 - 6x + 15)}{2(x-1)^3}$$

je enak 0 pri $x_4 = -3$. Pripadajoča funkcijska vrednost je $f(-3) = -\frac{27}{8}$. To je edina stacionarna točka.

b.) Definicijsko območje funkcije $g(x)$ so vsa realna števila, pri katerih je funkcija $f(x)$ nenegativna, torej

$$\mathcal{D}_g = [3, \infty),$$

kar vidimo iz grafa funkcije $f(x)$. Zaloga vrednosti funkcije $g(x)$ pa je enaka $[0, \infty)$.

Naloga 4 (20 točk)

Izračunajte nedoločeni integral

$$\int x \arctan x \, dx.$$

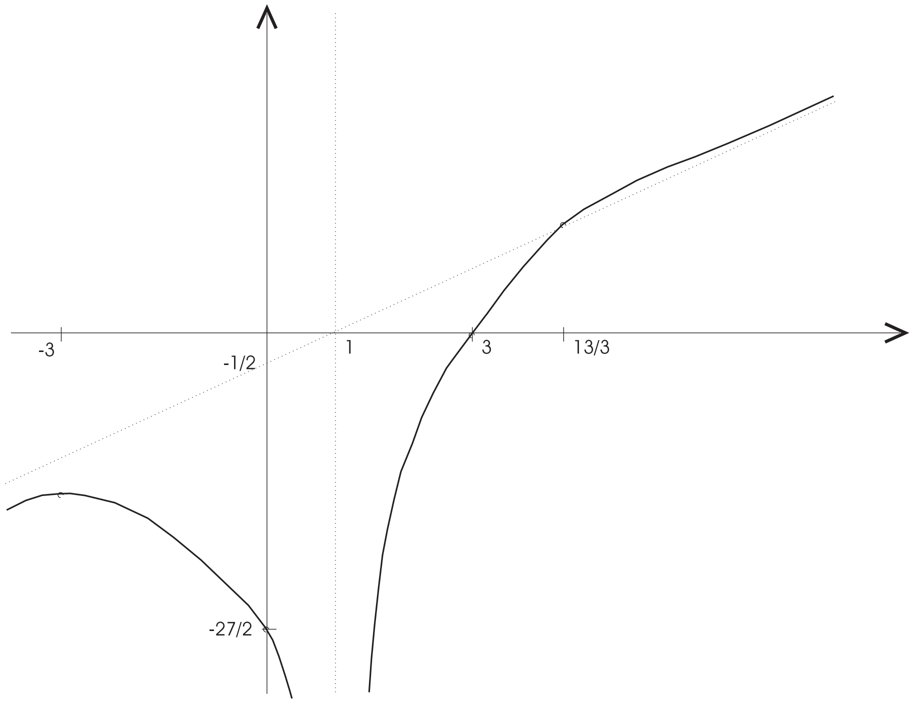
Uporabimo metodo integriranja po delih:

$$u = \arctan x \Longrightarrow du = \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$dv = x\, dx \Longrightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Sledi nedoločeni integral

$$\int x \arctan x \, dx = uv - \int v \, du = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2}\, dx =$$



$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1+x^2})\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

Naloga 5 (20 točk)

Krivuljo

$$y = \sqrt{\frac{1}{x(x^2+3)}}$$

zavrtimo okoli abscisne osi na intervalu $[1, 3]$. Izračunajte prostornino nastale vrtenine.

Prostornino vrtenine izračunamo po formuli

$$V = \pi \int_1^3 y^2\,dx = \pi \int_1^3 \frac{1}{x(x^2+3)}\,dx.$$

Pri izračunu nedoločenega integrala $\int \frac{1}{x(x^2+3)}\,dx$ *si pomagamo s parcialnimi ulomki:*

$$\frac{1}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3} = \frac{Ax^2+3A+Bx^2+Cx}{x(x^2+3)}.$$

Ko izenačimo polinoma v števcih, dobimo preprost sistem treh linearnih enačb za tri neznanke:

$$A + B = 0$$

$$C = 0$$

$$3A = 1$$

ki ima rešitev $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ *in* $C = 0$. *Sledi nedoločeni integral*

$$\int \frac{1}{x(x^2+3)}\,dx = \int (\frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{-\frac{1}{3}x}{x^2+3})dx = \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln|x^2+3| + C,$$

pri čemer smo v drugi del integrala uvedli novo spremenljivko $t = x^2 + 3$ *in dobili* $dt = 2x\,dx$. *Sedaj lahko izračunamo prostornino:*

$$V = \pi[\frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln|x^2+3|]_1^3 = \pi(\frac{1}{3}\ln 3 - \frac{1}{6}\ln 12 - \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{6}\ln 4) = \frac{\pi}{6}\ln 3.$$