

IZPIT IZ MATEMATIKE 1

Univerzitetni študij

26. januar 2009

1. Poišči rešitev enačbe

$$z^2 + (2 + i)z - i\bar{z} = -1.$$

Rešitev:

Kompleksno število $z = x + iy$ vstavimo v enačbo:

$$x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + ix + 2iy - y - ix - y = -1.$$

Primerjava realnih in imaginarnih komponent da sistem:

$$x^2 + 2x - y^2 - 2y = -1, \quad 2xy + 2y = 0.$$

Iz druge enačbe $(x + 1)y = 0$ sledi $x = -1$ ali $y = 0$. Vstavimo v prvo enačbo. V prvem primeru je $-y^2 - 2y - 1 = -1$, torej $y(y - 2) = 0$ in zato $y_1 = 0$ in $y_2 = 2$. V drugem primeru pa je $x^2 + 2x = -1$, kar je $(x + 1)^2 = 0$ in zato je $x = -1$. Dobimo dve rešitvi: $z_1 = -1$ in $z_2 = -1 - 2i$.

2. Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja $a_n = \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 3}$ razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon = \frac{1}{100}$?

Rešitev:

Najprej izračunamo limito:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 3} = \frac{2}{3}.$$

Nato pa rešimo enačbo $|a_n - a| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 3} - \frac{2}{3} \right| &< \frac{1}{100} \\ \frac{|2n^2 - 1 - 2n^2 - 2|}{3n^2 + 3} &< \frac{1}{100} \\ \frac{1}{n^2 + 1} &< \frac{1}{100} \\ n^2 &> 99 \\ n &> 9 \end{aligned}$$

Od 10-tega člena dalje so členi v ε -okolici limite.

3. Poišči tisto presečišče med krivuljama $y = -x^3 + 2x^2 + x - 1$ in $y = -2x^2 + x + 2$, katerega abscisa leži na intervalu $[0, 2]$. Določi kot med krivuljama v tem presečišču.

Rešitev:

Najprej izračunamo presečišče:

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 + x - 1 &= -2x^2 + x + 2 \\ x^3 - 4x^2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Enačbo rešimo s Hornerjevim algoritmom in dobimo rešitve $x_1 = 1$ in $x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$. Prva rešitev leži na danem intervalu, zato je iskano presečišče v točki $P(1, 1)$.

Kot med krivuljama je enak kotu med tangentama, ki ga izračunamo s formulo:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Potrebujemo oba smerna koeficienta. Odvod prve krivulje je $y' = -3x^2 + 4x + 1$ in zato $k_1 = y'(1) = 2$, odvod druge krivulje pa je $y' = -4x + 1$ in zato $k_2 = y'(1) = -3$. Torej:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{2+3}{1-6} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

4. Izračunaj integrala

(a)

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx,$$

(b)

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 2x} \, dx.$$

Rešitev:

(a) Uvedemo novo spremenljivko $t = \sin x$, $dt = \cos x \, dx$:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\ &= \int (t^3 - t^5) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} \\ &= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C \end{aligned}$$

(b) To je integral racionalne funkcije, ki jo najprej razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} = \frac{(A + B)x^2 + Cx + 2A}{x(x^2 + 2)}$$

Primerjava koeficientov da sistem enačb $A + B = 2$, $C = -1$ in $2A = 4$, ki ima rešitev $A = 2$, $B = 0$ in $C = -1$. Zato je

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 2x} \, dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2 + 2} \right) \, dx \\ &= 2 \ln |x| - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + D \end{aligned}$$

5. Izračunaj dolžino loka krivulje $r = e^{a\varphi}$ za $r < 1$.

Rešitev:

Da bo radij $0 < r < 1$, mora biti $-\infty < \varphi < 0$. Dolžino loka v polarnih koordinatah izračunamo po formuli: $s = \int_a^b \sqrt{(r')^2 + r^2} \, dr$.

Ker je $r = e^{a\varphi}$, je $r' = ae^{a\varphi}$ in zato

$$\sqrt{(r')^2 + r^2} = \sqrt{a^2 e^{2a\varphi} + e^{2a\varphi}} = \sqrt{a^2 + 1} e^{a\varphi}.$$

Dolžina loka:

$$s = \int_{-\infty}^0 \sqrt{a^2 + 1} e^{a\varphi} \, dr = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} e^{a\varphi} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$$