IZPIT IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

8. junij 2009

1. Dano je zaporedje
$$a_n = \frac{1-2n}{3+n}.$$
Določi monotonost, natančno zgornjo mejo, natančno spodnjo mejo, stekališča in limito tega zaporedja. Koliko členov zaporedja se od limite razlikuje za več kot $\varepsilon = \frac{3}{100}$?

Rešitev:

Zapišemo prvih nekaj členov zaporedja: $a_1 = -\frac{1}{4}$, $a_2 = -\frac{3}{5}$, $a_3 = -\frac{5}{6}$, ... Najprej preverimo monotonost:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{-1-2n}{4+n} - \frac{1-2n}{3+n} = -\frac{7}{(n+3)(n+4)} < 0.$$
Zaporedje je torej strogo padajoče. Opazimo tudi, da je navzdol omejeno z -2. Torej je
$$\sup_n a_n = a_1 = -\frac{1}{4}, \quad \inf_n a_n = -2.$$
Ker je zaporedje padajoče in navzdol omejeno, je konvergentno, torej ima eno samo stekališče, ki je enako limiti:
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-2n}{3+n} = -2.$$
Rešimo enačbo $|a_n - a| > \varepsilon$:
$$\begin{aligned}
\left|\frac{1-2n}{3+n} + 2\right| &> \frac{3}{100} \\
\frac{|1-2n+6+2n|}{3+n} &> \frac{3}{100} \\
\frac{7}{3+n} &> \frac{3}{100} \\
3n+9 &< 700 \\
n &< 230,\overline{3}
\end{aligned}$$
Prvih 230 členov se od limite razlikuje za več kot $\frac{3}{100}$.

2. Določi definicijsko območje in nariši graf funkcije

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{3x+4}}.$$

Rešitev:

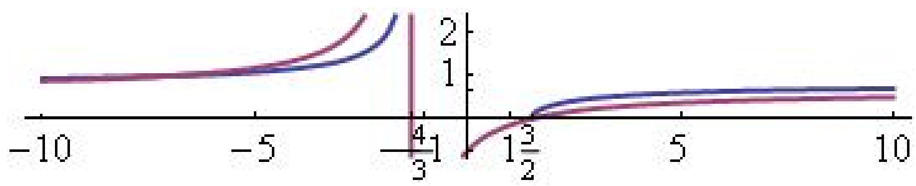
Definicijsko območje:

$$\frac{2x-3}{3x+4} \geq 0, \qquad 3x+4 \neq 0,$$

$$(2x-3)(3x+4) \geq 0, \qquad x \neq -\frac{4}{3},$$

$$\mathcal{D}f = \big(-\infty, -\frac{4}{3}\big) \cup \big[\frac{3}{2}, \infty\big).$$

Najprej narišemo graf racionalne funkcije $g(x) = \frac{2x-3}{3x+4}$, ki ima ničlo v $x = \frac{3}{2}$, pol v $x = -\frac{4}{3}$, vodoravno asimptoto $y = \frac{2}{3}$ in začetno vrednost $g(0) = -\frac{3}{4}$. Nato pa na ta graf z upoštevanjem lastnosti korenske funkcije narišemo še graf funkcije $f(x)$.



3. Določi in klasificiraj ekstreme funkcije

$$f(x) = 2x^3\mathrm{e}^{-x}.$$

Rešitev:

Funkcijo $f(x)$ odvajamo in odvod izenačimo z 0:

$$f'(x) = 6x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x^3\mathrm{e}^{-x} = 2x^2\mathrm{e}^{-x}(3-x) = 0.$$

Dobimo dve stacionarni točki: $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 3$. Klasifikacijo izvedemo z drugim odvodom:

$$f''(x) = 4x\mathrm{e}^{-x}(3-x) - 2x^2\mathrm{e}^{-x}(3-x) - 2x^2\mathrm{e}^{-x} = 2x\mathrm{e}^{-x}(x^2-6x+6).$$

Ker je $f''(0) = 0$, je v tej točki sedlo. Ker je $f''(3) = -18\mathrm{e}^{-3} < 0$, je v tej točki lokalni maksimum.

4. Izračunaj integral

$$\int \frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

To je integral racionalne funkcije, ki ga izračunamo z nastavkom:

$$\int \frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = A\ln(x+1) + B\ln(x^2+2) + C\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + D$$

Nastavek odvajamo in primerjamo koeficiente:

$$\begin{aligned}
\frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x+1)(x^2+2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{2Bx}{x^2+2} + \frac{C\sqrt{2}}{x^2+2} \\
&= \frac{A(x^2+2) + 2Bx(x+1) + C\sqrt{2}(x+1)}{(x+1)(x^2+2)} \\
&= \frac{(A+2B)x^2 + (2B + C\sqrt{2})x + (2A + C\sqrt{2})}{(x+1)(x^2+2)}
\end{aligned}$$

Dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}
A + 2B &= -2, \\
2B + C\sqrt{2} &= -4, \\
2A + C\sqrt{2} &= 4,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = 2$, $B = -2$ in $C = 0$. Integral je torej:

$$\int \frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = 2\ln(x+1) - 2\ln(x^2+2) + D.$$

5. Izračunaj volumen vrtenine, ki nastane, ko se krivulja

$$\begin{aligned} x &= 2(t - \sin t) \\ y &= 2(1 - \cos t) \end{aligned}$$

na intervalu $0 \leq t \leq 2\pi$ zavrti okrog x osi.

Rešitev:

Najprej izračunamo: $\dot{x} = 2(1 - \cos t)$, $\dot{y} = 2 \sin t$. Volumen vrtenine:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b y^2 \dot{x} \, \mathrm{d}t = 16\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \, \mathrm{d}t \\ &= 16\pi \left(\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t - 3 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t \, \mathrm{d}t}_{=0} + 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \mathrm{d}t - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^3 t \, \mathrm{d}t}_{=0} \right) \\ &= 16\pi \left(2\pi + \frac{3}{2} \left(\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(2t) \, \mathrm{d}t}_{=0} \right) \right) \\ &= 80\pi \end{aligned}$$