REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Določite in narišite podmnožico kompleksne ravnine, podane z enačbo

$$z\overline{z} + (1-i)z + (1+i)\overline{z} = 4.$$

Pišimo $z = x + iy$ in poenostavimo enačbo:

$$\begin{aligned}
(x+iy)(x-iy) + (1-i)(x+iy) + (1+i)(x-iy) &= 4,\\
x^2 + y^2 + x + iy - ix + y + x - iy + ix + y &= 4,\\
x^2 + y^2 + 2x + 2y &= 4,\\
(x+1)^2 + (y+1)^2 - 2 &= 4,\\
(x+1)^2 + (y+1)^2 &= 6.
\end{aligned}$$

Dobili smo enačbo krožnice s središčem v točki $S(-1,-1)$ in polmerom $\sqrt{6}$.

Naloga 2 (20 točk)

Narišite graf funkcije

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) - 1.$$

Določite še:

- periodo funkcije $f(x)$,
- začetno vrednost $f(0)$,
- zalogo vrednosti funkcije $f(x)$.

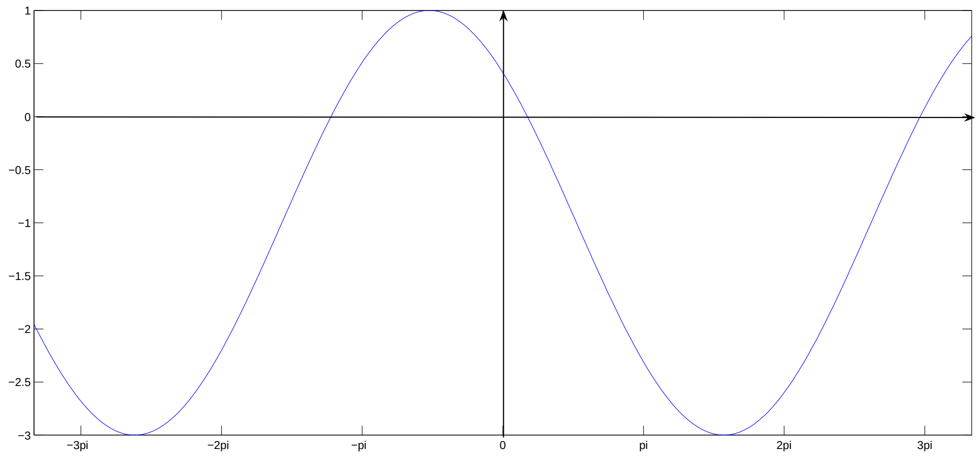
Najprej izračunajmo točke, v katerih ima osrednji del funkcije $f(x)$, to je

$$g(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right),$$

ničle, maksimume in minimume. Torej:

$$
\begin{aligned}
\textit{ničle:} \qquad & \cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=0,\\
& \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\\
& x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \qquad (k \textit{ je poljubno celo število})\\
\textit{maksimumi:} \qquad & \cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=1,\\
& \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}=2k\pi,\\
& x=-\frac{\pi}{2}+4k\pi, \qquad (k \textit{ je poljubno celo število})\\
\textit{minimumi:} \qquad & \cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=-1,\\
& \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}=\pi+2k\pi,\\
& x=\frac{3\pi}{2}+4k\pi. \qquad (k \textit{ je poljubno celo število})
\end{aligned}
$$

Graf funkcije $f(x)$ dobimo iz grafa funkcije $g(x)$, tako da ga raztegnemo za faktor 2 v smeri y (ekstremni vrednosti postaneta 2 in -2), nato pa dobljen graf prestavimo še za 1 navzdol (ekstremni vrednosti postaneta 1 in -3).



Odgovorimo še na dodatna vprašanja:

- *Perioda funkcije $f(x)$ je enaka 4π.*
- *Začetna vrednost je $f(0)=2\cos\frac{\pi}{4}-1=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\sqrt{2}-1$.*
- *zaloga vrednosti funkcije $f(x)$ je interval realnih števil $[-3,1]$.*

Naloga 3 (20 točk)

Zapišite enačbo tangente na krivuljo $y = e^{1-x^2}$ v presečišču s premico $y = 1$.

Najprej izračunajmo presečišče krivulje $y = e^{1-x^2}$ *s premico* $y = 1$*:*

$$\begin{aligned} e^{1-x^2} &= 1, \\ e^{1-x^2} &= e^0, \\ 1 - x^2 &= 0, \\ (1-x)(1+x) &= 0. \end{aligned}$$

Dobili smo dve rešitvi, $x_1 = 1$ *in* $x_2 = -1$*, zato imamo dve presečišči:*

$$T_1(1,1) \quad in \quad T(-1,1).$$

Smerna koeficienta obeh tangent dobimo, tako da izračunamo odvod funkcije $y = e^{1-x^2}$ *v obeh točkah:*

$$y' = -2x\, e^{1-x^2},$$
$$k_1 = y'(1) = -2 \quad in \quad k_2 = y'(-1) = 2.$$

Enačbi tangent sedaj dobimo takole:

$$\begin{aligned} T_1(1,1): \qquad & y = k_1 x + n_1, \\ & y = -2x + n_1, \\ & 1 = -2 \cdot 1 + n_1 \;\Rightarrow\; n_1 = 3, \\ & y = -2x + 3, \quad \textit{(prva tangenta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(-1,1): \qquad & y = k_2 x + n_2, \\ & y = 2x + n_2, \\ & 1 = 2 \cdot (-1) + n_2 \;\Rightarrow\; n_2 = 3, \\ & y = 2x + 3. \quad \textit{(druga tangenta)} \end{aligned}$$

Naloga 4 (20 točk)

Izračunajte nedoločeni integral

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x^3 + 4x} \right) dx.$$

Velja

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x^3 + 4x} \right) dx = \int \frac{\ln x}{x}\, dx + \int \frac{2}{x^3 + 4x}\, dx,$$

zato se osredotočimo na vsak integral posebej. V prvi integral lahko uvedemo novo spremenljivko:

$$t = \ln x \;\Rightarrow\; dt = \frac{dx}{x}.$$

Dobimo

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C_1 = \frac{\ln^2 x}{2} + C_1.$$

Pri izračunu drugega integrala si lahko pomagamo tako, da racionalno funkcijo pod integralom zapišemo s parcialnimi ulomki:

$$\frac{2}{x^3+4x} = \frac{2}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{Ax^2+4A+Bx^2+Cx}{x(x^2+4)}.$$

Ko izenačimo oba števca (na začetku in na koncu), dobimo:

$$2 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

in zato sistem treh enačb:

$$\begin{aligned} x^2 : &\qquad 0 = A + B,\\ x^1 : &\qquad 0 = C,\\ x^0 : &\qquad 2 = 4A. \end{aligned}$$

Rešitev sistema je $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ in $C = 0$. Sledi:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^3+4x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+4}\right)dx,\\ &= \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t}, \qquad (\textit{nova spr. } t = x^2+4 \;\Rightarrow\; dt = 2xdx)\\ &= \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln t + C_2,\\ &= \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + C_2. \end{aligned}$$

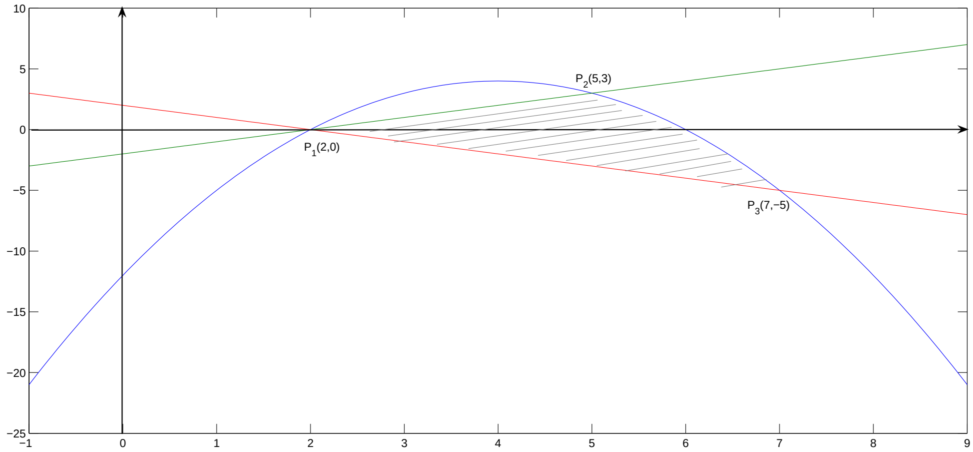
Dobili smo rešitev

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x^3+4x}\right)dx = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + C.$$

Naloga 5 (20 točk)

Izračunajte ploščino območja, ki ga omejujejo krivulje $y = -(x-2)(x-6)$, $y = x-2$ in $y = -x+2$.

Najprej narišimo skico:



Izračunajmo presečišča obeh premic s parabolo:

$$\begin{aligned}
\textit{prva premica:}\qquad & -(x-2)(x-6) = x-2,\\
& -x^2+8x-12 = x-2,\\
& x^2-7x+10=0,\\
& (x-2)(x-5)=0,\\
& x_1 = 2 \quad \textit{in} \quad x_2 = 5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{druga premica:}\qquad & -(x-2)(x-6) = -x+2,\\
& -x^2+8x-12 = -x+2,\\
& x^2-9x+14=0,\\
& (x-2)(x-7)=0,\\
& x_1 = 2 \quad \textit{in} \quad x_3 = 7.
\end{aligned}$$

Označimo: $P_1(2,0)$, $P_2(5,3)$ *in* $P_3(7,-5)$.

Ploščino območja med krivuljami izračunamo s pomočjo določenega integrala kot $S = S_1 + S_2$, *kjer je* S_1 *ploščina območja med* $x = 2$ *in* $x = 5$, S_2 *pa ploščina območja med* $x = 5$ *in* $x = 7$. *Dobimo:*

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_2^5 ((x-2)-(-x+2))\,dx = 3\cdot 3 = 9,\\
S_2 &= \int_5^7 (-(x-2)(x-6)-(-x+2))\,dx\\
&= \int_5^7 (-x^2+9x-14)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}-14x\right]_5^7\\
&= (-\frac{343}{3}+\frac{441}{2}-98)-(-\frac{125}{3}+\frac{225}{2}-70),\\
&= \frac{22}{3}.
\end{aligned}$$

Sledi rezultat:

$$S = 9 + \frac{22}{3} = \frac{49}{3}.$$