IZPIT IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

8. september 2009

1. Reši enačbo
$$z^3 = -2 + 2\mathrm{i}.$$

Rešitev:

Zapišemo levo in desno stran enačbe v polarni obliki.
Velja: $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ oz. $z^3 = |z|^3(\cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi)$.
Ker je $r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ in $\psi = \mathrm{arctg}\frac{-2}{2} = \mathrm{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, je $-2 + 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4})$.
Sledi:
$$|z|^3(\cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enak radij in enak kot. Zato rešimo enačbi: $|z|^3 = 2\sqrt{2}$ in $\cos 3\varphi = \cos\frac{3\pi}{4}$. Prva ima rešitev $|z| = \sqrt{2}$, druga pa $3\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, torej $\varphi_k = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Dobimo tri kote: $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_1 = \frac{11\pi}{12}$ in $\varphi_2 = \frac{19\pi}{12}$. Ti nam dajo tri rešitve po formuli $z_k = |z|(\cos\varphi_k + \mathrm{i}\sin\varphi_k)$, $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \mathrm{i},\\
z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right),\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

2. Dano je rekurzivno zaporedje
$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 1.$$

Pokaži, da je zaporedje konvergentno, in izračunaj limito zaporedja.

Rešitev:

Prvih nekaj členov zaporedja: $3, \frac{7}{4}, \frac{23}{16}, \ldots$.
Za dokaz konvergence je dovolj pokazati, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno.

i Pokažimo, da je zaporedje navzdol omejeno.

Z indukcijo pokažemo, da je $a_n > \frac{4}{3}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ je $a_1 = 3 > \frac{4}{3}$, torej baza indukcije drži. Za dokaz indukcijskega koraka vzamemo za indukcijsko predpostavko, da je $a_n > \frac{4}{3}$ in dokazujemo, da je tudi $a_{n+1} > -3$. Torej:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 1 > \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

ii Pokažimo, da je zaporedje padajoče.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}a_n + 1 - a_n = -\frac{3a_n}{4} + 1 < 0.$$

Ker je zaporedje padajoče in navzdol omejeno, je konvergentno.

Izračunajmo še limito. Označimo: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + 1 \\
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}a_n + 1\right) \\
a &= \frac{a}{4} + 1 \\
a &= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

3. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}.$$

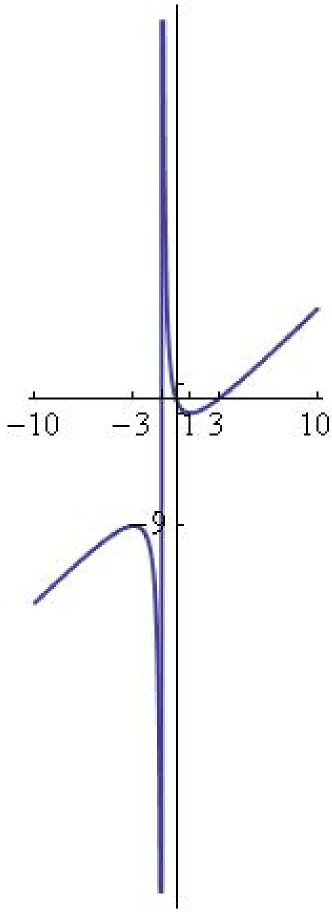
Določi ničle, pole, asimptote, ekstreme in intervale naraščanja in padanja ter nariši graf funkcije.

Rešitev:

To je racionalna funkcija. Ničle: $x(x-3) = 0$, torej $x_1 = 0$ in $x_2 = 3$. Pol: $x = -1$. Poševna asimptota: $y = x - 4$. Odvod:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2 - 3x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}.$$

Stacionarne točke: $x_1 = -3$ in $x_2 = 1$. Ker je $f'(-4) > 0$ in $f'(-2) < 0$, je v točki $x_1 = -3$ lokalni maksimum. Ker je $f'(0) < 0$ in $f'(2) > 0$, je v točki $x_2 = 1$ lokalni minimum. Velja še: $f(-3) = -9$ in $f(1) = -1$. Graf funkcije:



4. Ali sta hiperboli
$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{in} \quad xy = 2$$
ortogonalni?

Rešitev:

Presečišča:
Iz druge enačbe izrazimo $y = \frac{2}{x}$ in vstavimo v prvo enačbo. Dobimo kvadratno enačbo $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, ki ima dve realni rešitvi $x_{1,2} = \pm 2$. Hiperboli se sekata v točkah $T_1(2,1)$ in $T_2(-2,-1)$.

Hiperboli odvajamo:
$$2x - 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x}{y}$$
$$y + xy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{y}{x}$$

V obeh presečiščih je smerni koeficient tangente na prvo hiperbolo enak $k_1 = 2$, smerni koeficient tangente na drugo hiperbolo pa $k_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{k_1}$. To pa že pomeni, da sta tangenti pravokotni in zato krivulji ortogonalni.

5. Izračunaj integral
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x.$$

Rešitev:

Integral izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = \ln x$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 t \mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$