REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Poiščite vse realne rešitve enačbe

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x}=2.$$

Najprej opazimo, da je enačba v obsegu realnih števil definirana, če sta izraza pod korenom nenegativna:

$$x+2\geq 0 \quad \textit{in} \quad x\geq 0.$$

Oba pogoja sta izpolnjena, ko je $x \geq 0$.

Sedaj enačbo kvadriramo, jo ustrezno preuredimo in nato kvadriramo še enkrat:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2}+\sqrt{x} &= 2,\\
(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2 &= 4,\\
x+2+2\sqrt{x+2}\sqrt{x}+x &= 4,\\
2\sqrt{x+2}\sqrt{x} &= 2-2x,\\
\sqrt{x+2}\sqrt{x} &= 1-x,\\
(\sqrt{x+2}\sqrt{x})^2 &= (1-x)^2,\\
(x+2)x &= 1-2x+x^2,\\
4x &= 1,\\
x &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Dobljen $x=\frac{1}{4}$ zadošča zgornjemu pogoju $x\geq 0$, zato je rešitev naloge.

Naloga 2 (20 točk)

Dano je zaporedje s splošnim členom

$$a_n=\frac{10^n}{n!}.$$

a.) Preverite, kdaj zaporedje narašča in kdaj pada.

b.) Določite najmanjši in največji člen zaporedja, če obstajata.

c.) Določite natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo zaporedja.

d.) Kakšna je limita zaporedja?

Gremo po vrsti.

a.) Naraščanje in padanje zaporedja a_n lahko preverimo z izračunom kvocienta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{10^n}{n!}} = \frac{10^{n+1} \cdot n!}{10^n \cdot (n+1)!} = \frac{10}{n+1}.$$

Zaporedje bo naraščalo, ko bo ta kvocient večji kot 1*, in padalo, ko bo kvocient manjši kot* 1*. Dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{10}{n+1} > 1 \;\Rightarrow\; 10 > n+1 \;\Rightarrow\; n < 9 \quad \textit{(zaporedje narašča)}, \\ \frac{10}{n+1} < 1 \;\Rightarrow\; 10 < n+1 \;\Rightarrow\; n > 9 \quad \textit{(zaporedje pada)}. \end{aligned}$$

Pri $n = 9$ zaporedje stagnira, torej velja $a_9 = a_{10}$.

b.) Največji člen zaporedja je

$$\max_n a_n = a_9 = a_{10} = \frac{10^{10}}{10!},$$

najmanjši člen zaporedja pa ne obstaja, saj zaporedje konvergira proti 0*.*

c.) Natančna zgornja meja (ali supremum) je enaka največjemu členu zaporedja,

$$\sup_n a_n = \max_n a_n = \frac{10^{10}}{10!},$$

natančna spodnja meja (ali infimum) pa limiti zaporedja,

$$\inf_n a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

d.) Imenovalec $n!$ splošnega člena a_n od nekje naprej veliko hitreje narašča kot števec 10^n, zato velja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} = 0.$$

Lahko bi tudi izračunali

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \cdot \frac{10}{n-1} \cdots \frac{10}{2} \cdot \frac{10}{1} = 0,$$

saj so vsi kvocienti omejeni z 0 *in z* 10 *ter velja $\lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} = 0$.*

Naloga 3 (20 točk)

Izračunajte in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(2x).$$

Poiščimo stacionarne točke funkcije:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \cdot \ln(2x) + x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = 2x \cdot \ln(2x) + x, \\
f'(x) = 0 &\iff 2x \cdot \ln(2x) + x = 0
\end{aligned}
$$

Zgornja enačba ima dve rešitvi:

$$
\begin{aligned}
x(2\ln(2x) + 1) &= 0 \\
x_1 = 0 \qquad & 2\ln(2x) + 1 = 0 \\
& \ln(2x) = -\frac{1}{2} \\
& 2x = e^{-\frac{1}{2}} \\
& x_2 = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Ker $x_1 = 0$ ni v definicijskem območju funkcije $f(x)$, smo dobili eno samo stacionarno točko $x_2 = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, ki je kandidat za lokalni ekstrem. Izračunajmo še drugi odvod funkcije:

$$
f''(x) = 2 \cdot \ln(2x) + 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 + 1 = 2 \cdot \ln(2x) + 3.
$$

Vrednost drugega odvoda v stacionarni točki x_2 je tedaj

$$
f''(x_2) = 2 \cdot \ln e^{-\frac{1}{2}} + 3 = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3 = 2 > 0,
$$

kar pomeni, da ima funkcija $f(x)$ v točki x_2 lokalni minimum.

Naloga 4 (20 točk)

Izračunajte nedoločeni integral

$$
\int \frac{x^4}{(x-2)(x+3)}\, dx.
$$

Namig: Polinom v števcu delite s polinomom v imenovalcu.

Ker je stopnja polinoma v števcu večja od stopnje polinoma v imenovalcu, oba polinoma najprej delimo:

$$
\begin{array}{r}
x^4 \quad : \quad (x^2 + x - 6) = x^2 - x + 7 + \dfrac{-13x + 42}{x^2 + x - 6} \\
\underline{-(x^4 + x^3 - 6x^2)} \\
-x^3 + 6x^2 \\
\underline{-(-x^3 - x^2 + 6x)} \\
7x^2 - 6x \\
\underline{-(7x^2 + 7x - 42)} \\
-13x + 42 \quad \textit{ostanek}
\end{array}
$$

Torej

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{(x-2)(x+3)}\,dx &= \int \left(x^2 - x + 7 + \frac{-13x+42}{(x-2)(x+3)}\right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x + \int \frac{-13x+42}{(x-2)(x+3)}\,dx.\end{aligned}$$

Preostali integral rešimo z metodo delnih ulomkov:

$$\frac{-13x+42}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}.$$

Ko izenačimo oba števca, dobimo

$$-13x + 42 = A(x+3) + B(x-2)$$

oziroma sistem enačb:

$$\begin{aligned} x &: \ -13 = A + B, \\ x^0 &: \ 42 = 3A - 2B, \end{aligned}$$

od koder sledi $A = \frac{16}{5}$ *in* $B = -\frac{81}{5}$. *Sedaj dobimo*

$$\int \frac{-13x+42}{(x-2)(x+3)}\,dx = \int \left(\frac{\frac{16}{5}}{x-2} + \frac{-\frac{81}{5}}{x+3}\right) dx = \frac{16}{5} \cdot \ln|x-2| - \frac{81}{5} \cdot \ln|x+3| + C.$$

Rezultat, iskani nedoločeni integral, je zato

$$\int \frac{x^4}{(x-2)(x+3)}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x + \frac{16}{5} \cdot \ln|x-2| - \frac{81}{5} \cdot \ln|x+3| + C.$$

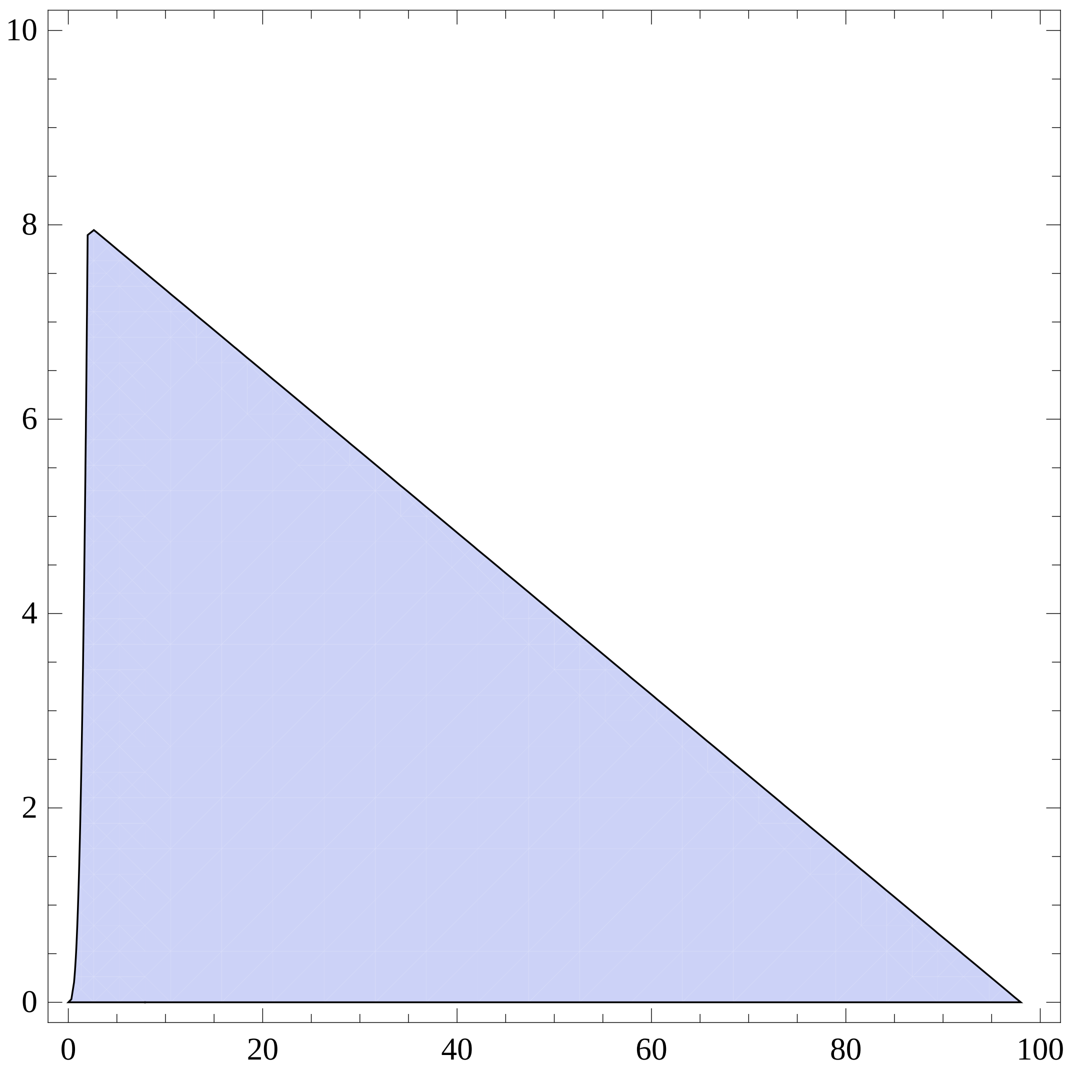
Naloga 5 (20 točk)

Izračunajte ploščino območja, ki ga omejujejo abscisna os, graf funkcije $f(x) = x^3$ in normala na graf funkcije $f(x)$ v točki $T(2, f(2))$.

Poiščimo najprej enačbo iskane normale:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2, \\ k_n &= -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{12}, \\ y - 8 &= -\frac{1}{12}(x-2), \\ y &= -\frac{1}{12}x + \frac{49}{6} \quad \textit{(normala)}. \end{aligned}$$

Območje, katerega ploščino računamo, zdaj prikazuje spodnja skica.



Vidimo, da je sestavljeno iz dveh delov: levi del območja (med $x = 0$ in $x = 2$) omejujeta funkcija $f(x)$ in abscisna os, desni del območja (med $x = 2$ in $x = 98$) pa ima obliko pravokotnega trikotnika. Ploščino trikotnika izračunamo kar po znani formuli

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot (98 - 2) \cdot f(2) = \frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 8 = 384.$$

Ploščino levega območja pa izračunamo s pomočjo določenega integrala:

$$S_l = \int_0^2 (f(x) - 0)\, dx = \int_0^2 x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4 - 0 = 4.$$

Rezultat je zato $S = S_{\triangle} + S_l = 384 + 4 = 388$.