Izpit Matematika I

9.6.2010

1. Dano je zaporedje
$$a_n = 2 + \frac{1}{n^2 - 20}$$
Izračunajte natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo. Če je zaporedje konvergentno, izračunajte limito zaporedja !

2. Izračunajte limito
$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$$

3. Na krivulji
$$y = \frac{1}{1+x^2}$$
poiščite točke, v katerih je krivulja najbolj strma !

4. Izračunajte nedoločeni integral
$$\int \frac{4x+3}{x(x+3)} dx$$

5. V polarnih koordinatah je dana krivulja z enačbo
$$r = 1 + \cos\varphi$$
Izračunajte dolžino tistega dela krivulje, ki leži znotraj krožnice
$$r = 3\cos\varphi$$

Rešitve

1. naloga

Za ulomek $\frac{1}{n^2-20}$ ugotovimo:

$n \leq 4 \;\rightarrow\;$ ulomek je negativen in narašča, zaporedje a_n je padajoče
$n \geq 5 \;\rightarrow\;$ ulomek je pozitiven in pada, zaporedje a_n je pada proti 0

Iz obojega sledi

Natančna spodnja meja $= a_4 = 2 + \frac{1}{-4} = \boxed{\frac{7}{4}}$

Natančna zgornja meja $= a_5 = 2 + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{11}{5}}$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \boxed{2}$

2. naloga

Z dvakratno uporabo *l'Hospitalovega* pravila se dobi:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 1}\ \frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=$$

$$\lim_{x\to 1}\ \frac{\ln x+1-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=$$

$$\lim_{x\to 1}\ \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+(x-1)\frac{-1}{x^2}}=$$

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

3. naloga

Krivulja bo najbolj strma v tistih točkah, kjer so ekstremi odvoda. To so prevoji, ki se jih dobi, če drugi odvod izenačimo z 0.

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}$$

$$-2(1+x^2) + 8x^2 = 0$$

$$6x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad y = \frac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{T_{1,2}(\pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{3}{4}\Big)}$$

4. naloga

$$\frac{4x+3}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$$

$$A(x+3) + Bx = 4x+3$$

$$3A = 3 \ \rightarrow \ A = 1$$

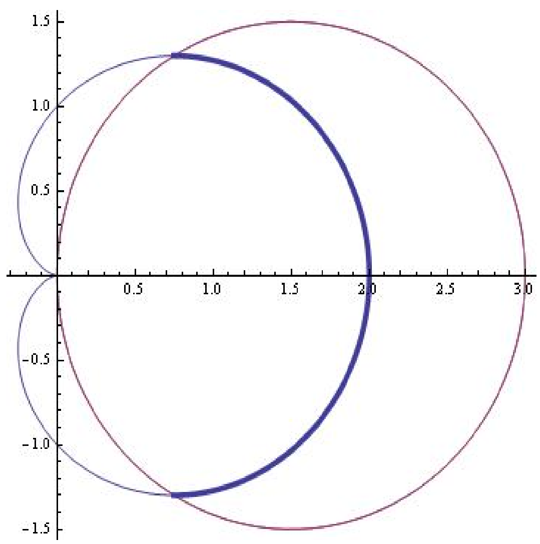
$$A + B = 4 \ \rightarrow \ B = 3$$

$$\int \frac{4x+3}{x(x+3)}dx = \int \Big(\frac{1}{x} + \frac{3}{x+3}\Big)dx =$$

$$\boxed{\ln|x| + 3ln|x+3| + C}$$

5. naloga

Iskana dolžina je v sliki odebeljena.Presečišče krivulj bo določalo meje v integralu za dolžino.



$$1 + \cos\varphi = 3\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi \;= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi \;=$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2+2\cos\varphi}d\varphi \;= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi \;= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi \;= 8\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 8\cdot\tfrac{1}{2} = \boxed{4}$$