REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Določite vsa realna števila, ki zadoščajo neenačbi

$$\frac{1}{3x-2} > \frac{1}{x+4}.$$

Neenačbo malo preoblikujmo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{x+4} &> 0,\\
\frac{(x+4)-(3x-2)}{(3x-2)(x+4)} &> 0,\\
\frac{6-2x}{(3x-2)(x+4)} &> 0,\\
\frac{2(3-x)}{(3x-2)(x+4)} &> 0.
\end{aligned}$$

Ločimo dve možnosti:

- $3-x>0$ *oziroma* $x<3$*:*
  V tem primeru neenačba velja, če je imenovalec pozitiven, to je
  $$(3x-2)(x+4) > 0,$$
  kar velja za $x \in (-\infty,-4) \cup (\frac{2}{3},\infty)$. *Prva množica rešitev je zato*
  $$\Big((-\infty,-4) \cup (\frac{2}{3},\infty)\Big) \cap (-\infty,3) = (-\infty,-4) \cup (\frac{2}{3},3).$$
- $3-x<0$ *oziroma* $x>3$*:*
  V tem primeru neenačba velja, če je imenovalec negativen, to je
  $$(3x-2)(x+4) < 0,$$
  kar velja za $x \in (-4,\frac{2}{3})$. *Druga množica rešitev je zato*
  $$(-4,\frac{2}{3}) \cap (3,\infty) = \emptyset.$$

Rešitev naloge so vsa realna števila iz intervala $(-\infty,-4) \cup (\frac{2}{3},3)$.

Naloga 2 (20 točk)

Poiščite vse pare kompleksnih števil z_1 in z_2, ki so rešitve sistema:

$$\begin{aligned}
z_1^2 \cdot \overline{z_2} &= \sqrt{2},\\
\frac{z_1}{\overline{z_2}} &= i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Iz druge enačbe lahko izrazimo

$$\overline{z_2} = \frac{z_1}{i\sqrt{2}}$$

in ga vstavimo v prvo enačbo, da dobimo:

$$\frac{z_1^3}{i\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

oziroma

$$z_1^3 = 2i.$$

To enačbo rešimo z uvedno polarnih koordinat:

$$\begin{aligned} z_1 &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ 2i &= 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Iz De Moivrove formule sledi enačba

$$r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}),$$

kjer mora veljati naslednje:

$$\begin{aligned} r^3 &= 2, \\ 3\varphi &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{2}, \\ \varphi &= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, \;\; k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Kompleksna spremenljivka z_1 *lahko zavzame tri različne vrednosti:*

$$\begin{aligned} k = 0: \; z_1^{(1)} &= \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3} + i), \\ k = 1: \; z_1^{(2)} &= \sqrt[3]{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-\sqrt{3} + i), \\ k = 2: \; z_1^{(3)} &= \sqrt[3]{2}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -i\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Pripadajoče vrednosti kompleksne spremenljivke z_2 *so:*

$$\begin{aligned} z_2^{(1)} &= \frac{\overline{z_1^{(1)}}}{i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2i\sqrt{2}}(\sqrt{3} - i) = \frac{1}{2i\sqrt[6]{2}}(\sqrt{3} - i), \\ z_2^{(2)} &= \frac{\overline{z_1^{(2)}}}{i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2i\sqrt{2}}(-\sqrt{3} - i) = \frac{1}{2i\sqrt[6]{2}}(-\sqrt{3} - i), \\ z_2^{(3)} &= \frac{\overline{z_1^{(3)}}}{i\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt[6]{2}}. \end{aligned}$$

Naloga 3 (20 točk)

Izmed vseh pravokotnih trikotnikov z obsegom 1 poiščite tistega, ki ima največjo ploščino. Določite dolžini obeh njegovih katet.

Za pravokotne trikotnike z obsegom 1 velja

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 1,$$

kjer sta a in b dolžini katet, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ pa dolžina hipotenuze pravokotnega trikotnika. Ploščino pravokotnega trikotnika izračunamo po obrazcu

$$p = \frac{1}{2}ab.$$

Če iz zveze za obseg izrazimo eno spremenljivko (na primer a), postane ploščina funkcija edine spremenljivke b. To naredimo na naslednji način:

$$\begin{aligned}
a + b + \sqrt{a^2 + b^2} &= 1, \\
\sqrt{a^2 + b^2} &= 1 - a - b, \ (\textit{enačbo kvadriramo in si zapomnimo } 1 - a - b \geq 0) \\
a^2 + b^2 &= (1 - a - b)^2, \\
a^2 + b^2 &= 1 - 2(a + b) + (a + b)^2, \\
1 - 2a - 2b + 2ab &= 0, \\
a(2b - 2) &= 2b - 1, \\
a &= \frac{2b - 1}{2b - 2}.
\end{aligned}$$

Ploščina se sedaj izraža kot

$$p = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2b - 1)b}{2b - 2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2b^2 - b}{b - 1}.$$

Poiščimo stacionarne točke funkcije, ki računa ploščino pravokotnih trikotnikov z obsegom 1 in dolžino ene katete b:

$$p' = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4b - 1)(b - 1) - (2b^2 - b)}{(b - 1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2b^2 - 4b + 1}{(b - 1)^2},$$

$$p' = 0 \iff 2b^2 - 4b + 1 = 0,$$

$$b_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pripadajoča dolžina druge katete a je tedaj enaka:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2b_1 - 1}{2b_1 - 2} = \frac{2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) - 1}{2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) - 2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = b_1, \\
a_2 &= \frac{2b_2 - 1}{2b_2 - 2} = \frac{2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) - 1}{2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) - 2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = b_2.
\end{aligned}$$

Ko preverimo, ali velja $1-a-b \geq 0$, ugotovimo, da temu pogoju zadošča le drugi par:

$$a_2 = b_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ker na robu definicijskega območja in v točkah nezveznosti/neodvedljivosti funkcije ploščine dobimo trikotnike z najmanjšo ploščino, je dobljen trikotnik z dolžinama katet $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ edini kandidat za globalni maksimum. To je torej iskan pravokotni trikotnik.

Naloga 4 (20 točk)

Narišite graf funkcije

$$f(x) = x \cdot \ln x^3.$$

Določite še:

- definicijsko območje funkcije $f(x)$,
- ničle funkcije $f(x)$,
- ekstreme funkcije $f(x)$,
- zalogo vrednosti funkcije $f(x)$.

Najprej opazimo, da lahko funkcijo $f(x)$ zapišemo tudi drugače:

$$f(x) = 3x \cdot \ln x.$$

Da bi čim bolj natančno narisali graf funkcije $f(x)$, je dobro določiti definicijsko območje funkcije, izračunati ničle in lokalne ekstreme ter preveriti obnašanje funkcije na robu definicijskega območja.

- *Definicijsko območje funkcije $f(x)$ so vsa pozitivna realna števila: $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.*
- *Ničle dobimo takole:*

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 0, \\ 3x \cdot \ln x & = & 0, \\ x = 0 & \textit{ali} & \ln x = 0, \\ x_1 = 0 & \textit{in} & x_2 = 1. \end{array}$$

- *Kandidati za lokalne ekstreme so stacionarne točke:*

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 0, \\ 3\ln x + 3 & = & 0, \\ \ln x + 1 & = & 0, \\ \ln x & = & -1, \\ x_3 & = & e^{-1}. \end{array}$$

Preverimo še, ali je v dobljeni točki res lokalni ekstrem funkcije:

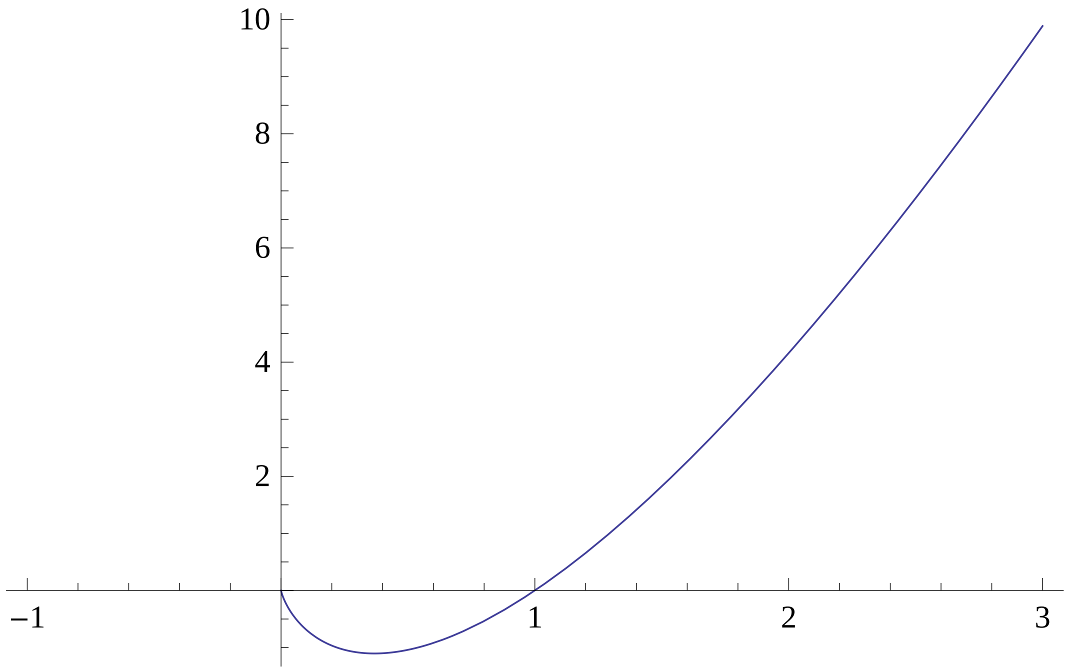
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3}{x}, \\ f''(e^{-1}) &= 3e > 0. \end{aligned}$$

V $x_3 = e^{-1}$ *ima torej funkcija* $f(x)$ *lokalni minimum. Vrednost funkcije v tej točki je* $f(x_3) = 3e^{-1} \cdot \ln e^{-1} = -3e^{-1} < 0$.

- *Preverimo obnašanje funkcije na robu definicijskega območja, to je pri* $x \to 0$ *in* $x \to \infty$*:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} 3x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-3x) = 0, \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} 3x \cdot \ln x = \infty. \end{aligned}$$

Sedaj lahko narišemo graf funkicje $f(x)$*:*



Vidimo, da so v zalogi vrednosti funkcije $f(x)$ *vsa realna števila, večja ali enaka lokalnemu minimumu funkcije:* $Z_f = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -3e^{-1}\}$.

Naloga 5 (20 točk)

Izračunajte ploščino območja, ki ga omejujejo graf funkcije

$$g(x) = \frac{2x+3}{(x^2+1)(x-5)},$$

abscisna os ter premici $x = 0$ in $x = 2$.

Ker je funkcija $g(x)$ na intervalu $[0,2]$ negativno predznačena, je ploščina danega območja enaka določenemu integralu

$$p = -\int_0^2 g(x)\,dx = -\int_0^2 \frac{2x+3}{(x^2+1)(x-5)}\,dx.$$

Izračunajmo najprej nedoločeni integral

$$\int g(x)\,dx = \int \frac{2x+3}{(x^2+1)(x-5)}\,dx.$$

Izraz pod integralom razbijmo na parcialna ulomka:

$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{(x^2+1)(x-5)} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-5} \\
&= \frac{(Ax+B)(x-5) + C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-5)} \\
&= \frac{(A+C)x^2 + (B-5A)x + C - 5B}{(x^2+1)(x-5)}.
\end{aligned}$$

Koeficienti A, B, C morajo zadoščati naslednjim pogojem:

$$\begin{aligned}
A + C &= 0, \\
B - 5A &= 2, \\
C - 5B &= 3.
\end{aligned}$$

Rešitev tega sistema linearnih enačb je: $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ in $C = \frac{1}{2}$. Sedaj sledi

$$\begin{aligned}
\int g(x)\,dx &= \int \frac{2x+3}{(x^2+1)(x-5)}\,dx \\
&= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-5} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int \left(\frac{-x-1}{x^2+1} + \frac{1}{x-5} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x-5} \right) dx \\
&= -\frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \ln|x-5| + C,
\end{aligned}$$

pri čemer smo v prvi integral uvedli novo spremenljivko ($t = x^2 + 1 \implies dt = 2xdx$). Ploščina območja je sedaj enaka

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \ln|x-5| \right]_0^2 = \\
&= \frac{1}{4} \ln 5 + \frac{1}{2} \arctan 2 - \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{4} \ln 1 - \frac{1}{2} \arctan 0 + \frac{1}{2} \ln 5 = \\
&= \frac{3}{4} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \arctan 2.
\end{aligned}$$