IZPIT IZ MATEMATIKE I
Univerzitetni študij
22. september 2010

1. Rešite enačbo
$$\big||x|-1\big| = 1.$$

Rešitev:

Imamo dve gnezdeni absolutni vrednosti. Najprej ločimo dva primera za notranjo absolutno vrednost, nato pa vsak primer nadalje ločimo na dva podprimera.

I) $x \geq 0 \quad : \quad |x-1| = 1$

  I.i) $x \geq 1 \quad : \quad x-1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

  I.ii) $0 \leq x < 1 \quad : \quad -x+1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

II) $x < 0 \quad : \quad |-x-1| = 1$

  II.i) $x < -1 \quad : \quad -x-1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

  II.ii) $-1 \leq x < 0 \quad : \quad x+1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Množica rešitev enačbe: $x \in \{-2, 0, 2\}$.

2. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n-5}{3n+2}$.

   a) Zapišite prvih 5 členov zaporedja.
   b) Dokažite, da je zaporedje konvergentno, in izračunajte limito.
   c) Določite minimalni in maksimalni člen zaporedja, če obstajata, sicer pa infimum in supremum.

Rešitev:

   a) Prvih 5 členov: $a_1 = -\frac{3}{5}$, $a_2 = -\frac{1}{8}$, $a_3 = \frac{1}{11}$, $a_4 = \frac{3}{14}$, $a_5 = \frac{5}{17}$.
   b) Zaporedje je konvergentno, ko je naraščajoče in navzgor omejeno. Ker je
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n-3}{3n+5} - \frac{2n-5}{3n+2} = \frac{19}{(3n+5)(3n+2)} > 0,$$
je zaporedje naraščajoče. Ker je $a_n = \frac{2n-5}{3n+2} < 1$, je zaporedje tudi navzgor omejeno.
Limita: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{3n+2} = \frac{2}{3}$.

c) Ker je zaporedje monotono naraščajoče, je $\min_n a_n = \inf_n a_n = a_1 = -\frac{3}{5}$, $\max_n a_n$ ne obstaja, $\sup_n a_n = \frac{2}{3}$.

3. S pomočjo diferenciala približno izračunajte $\ln(1.05)$.

Rešitev:
Funkcija, ki jo uporabimo, je $f(x) = \ln x$. Njen odvod je $f'(x) = \frac{1}{x}$. Približek poiščemo po formuli

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a) \cdot h,$$

kjer vzamemo $a = 1$ in $h = 0.05$. Torej:

$$\ln(1.05) \doteq \ln 1 + 1 \cdot 0.05 = 0.05$$

4. Izračunajte limito

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{\ln(x^4 + 3x + 1)}.$$

Rešitev:
Uporabimo L'Hopitalovo pravilo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{\ln(x^4 + 3x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x-2}{(x^2-2x+1)}}{\frac{4x^3+3}{(x^4+3x+1)}} = -\frac{2}{3}$$

5. Izračunajte integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5 + 3\cos x}.$$

NAMIG: Nova spremenljivka $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

Rešitev:
Uporabimo novo spremenljivko $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, oziroma $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ in $\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{5 + 3\cos x} &= \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{5 + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{4 + t^2} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$