IZPIT IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

31. januar 2011

1. Rešite enačbo
$$\frac{1}{z+\mathrm{i}}+\frac{3-\mathrm{i}}{\mathrm{i}+2}=-3.$$

Rešitev:

Rešujemo enačbo ($z = x + \mathrm{i}y$):
$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}}+\frac{3-\mathrm{i}}{\mathrm{i}+2} &= -3\\
\frac{1}{x+\mathrm{i}(y+1)}+\frac{(3-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5} &= -3\\
\frac{1}{x+\mathrm{i}(y+1)}+1-\mathrm{i} &= -3\\
x+\mathrm{i}(y+1) &= \frac{1}{-4+\mathrm{i}}\\
x+\mathrm{i}(y+1) &= \frac{-4-\mathrm{i}}{17}
\end{aligned}$$

Sledi: $x = -\frac{4}{17}$, $y = -\frac{18}{17}$ in $z = -\frac{4}{17} - \frac{18}{17}\mathrm{i}$.

2. Ali je vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5n!}$$
konvergentna? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

Izračunamo limito:
$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{5(n+1)!}}{\frac{2^n+3^n}{5n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{(n+1)(2^n+3^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{(n+1)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}=0<1$$

Ker je $q < 1$, po kvocientnem kriteriju sledi, da je vrsta konvergentna.

3. Poiščite točko na krivulji $y = x^2 - \frac{1}{3}x + 2$, ki je najbližje točki $T(-1, -1)$.

Rešitev:

Iščemo minumum razdalje $d(x, y) = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}$, kjer je $y = x^2 - \frac{1}{3}x + 2$:
$$d(x)=\sqrt{(x+1)^2+(x^2-\frac{1}{3}x+3)^2}=\sqrt{x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{64}{9}x^2+10}.$$

Odvajamo in odvod izenačimo z 0:
$$d'(x)=\frac{4x^3-2x^2+\frac{128}{9}x}{2\sqrt{x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{64}{9}x^2+10}}=0.$$

Edino stacionarno točko dobimo pri $x = 0$. Hitro se prepričamo, da je v tej točki minimum funkcije razdalje, in dobimo, da je najbližja točka $P(0, 2)$.

4. Izračunajte integrala

   a)
$$\int \ln(3x)\,dx,$$

   b)
$$\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}.$$

Rešitev:

   a) Integral izračunamo po metodi per partes ($u = \ln(3x)$, $dv = dx$, $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$):
$$\int \ln(3x)\,dx = x\ln(3x) - \int dx = x\ln(3x) - x + C$$

   b) Integral izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = 2-3x$, $dt = -3dx$:
$$\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{2-3x}} = -\frac{1}{3}\int_4^1 t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}$$

5. Izračunajte dolžino astroide
$$\begin{aligned} x(t) &= 2\sin^3 t, \\ y(t) &= 2\cos^3 t. \end{aligned}$$

Rešitev:
Dolžino loka krivulje v parametrični obliki izračunamo po formuli $s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dx$. Astroida je sklenjena krivulja, sestavljena iz 4 enako dolgih lokov, zato zadošča integrirati od 0 do $\frac{\pi}{2}$ in rezultat množiti s 4.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 6\sin^2 t\cos t \\ \dot{y} &= -6\sin t\cos^2 t \\ \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} &= \sqrt{36\sin^4 t\cos^2 t + 36\sin^2 t\cos^4 t} \\ &= 6\sin t\cos t\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 6\sin t\cos t \\ s &= 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin t\cos t\,dt = 24\int_0^1 u\,du = 12u^2\Big|_0^1 = 12 \end{aligned}$$

Integral rešimo z uvedbo nove spremenljivke $u = \sin t$, $du = \cos t dt$.