REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Skicirajte podmnožico realne ravnine, ki je določena z neenačbo

$$|x| - |y| \geq 2.$$

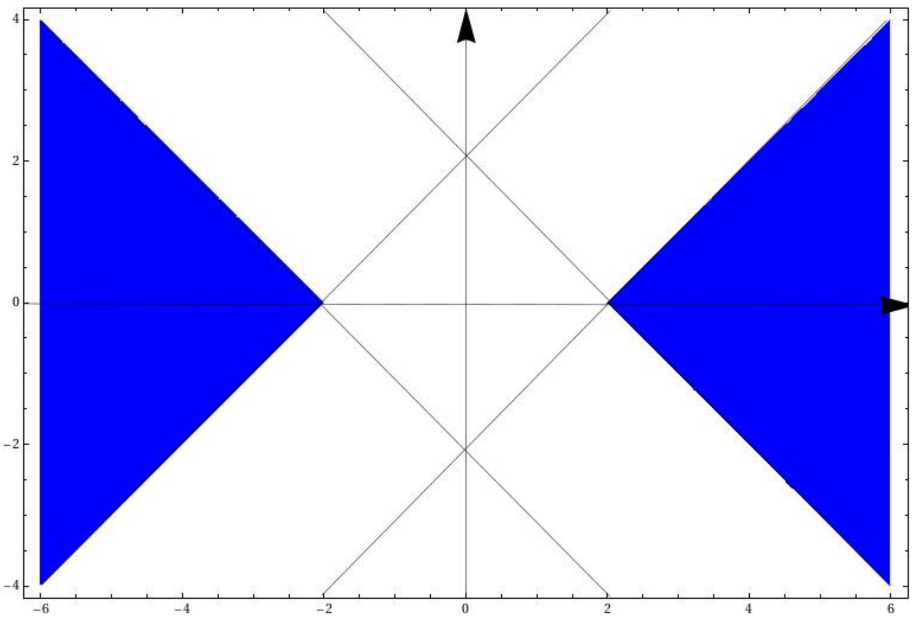
Ločimo štiri možnosti:

(1) $x \geq 0$ in $y \geq 0$ (1. kvadrant): dobimo neenačbo $x - y \geq 2$ in zato $y \leq x - 2$. V 1. kvadrantu dobimo del ravnine pod premico $y = x - 2$.

(2) $x \geq 0$ in $y < 0$ (4. kvadrant): dobimo neenačbo $x + y \geq 2$ in zato $y \geq -x + 2$. V 4. kvadrantu dobimo del ravnine nad premico $y = -x + 2$.

(3) $x < 0$ in $y \geq 0$ (2. kvadrant): dobimo neenačbo $-x - y \geq 2$ in zato $y \leq -x - 2$. V 2. kvadrantu dobimo del ravnine pod premico $y = -x - 2$.

(4) $x < 0$ in $y < 0$ (3. kvadrant): dobimo neenačbo $-x + y \geq 2$ in zato $y \geq x + 2$. V 3. kvadrantu dobimo del ravnine nad premico $y = x + 2$.



Naloga 2 (20 točk)

Dani sta zaporedji s splošnima členoma:

$$a_n = -n^3 + 91n + 5 \quad \text{in} \quad b_n = 1 + \frac{1}{3n^3}.$$

Izračunajte:

- kdaj (za katere indekse n) zaporedje $\{a_n\}$ narašča in kdaj pada,
- najmanjši in največji člen zaporedja $\{a_n\}$, če obstajata,
- infimum in supremum zaporedja $\{b_n\}$,
- limito $\lim\limits_{n\to\infty} {b_n}^{a_n}$.

- *Najprej ugotovimo, kdaj zaporedje $\{a_n\}$ narašča in kdaj pada. V ta namen izračunajmo razliko dveh zaporednih členov:*

$$a_{n+1} - a_n = -(n+1)^3 + 91(n+1) + 5 - (-n^3 + 91n + 5) = -3n^2 - 3n + 90.$$

Zaporedje narašča, kadar velja:

$$-3n^2 - 3n + 90 \geq 0 \quad \textit{oziroma} \quad n^2 + n - 30 = (n-5)(n+6) \leq 0.$$

Zgornja neenačba velja za $1 \leq n \leq 5$. Sledi:

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} > 0 & n = 1, 2, 3, 4 \quad \textit{(narašča)} \\ = 0 & n = 5 \quad \textit{(stagnira)} \\ < 0 & n \geq 6 \quad \textit{(pada)} \end{cases}$$

- *Iz prejšnje točke sledi, da zaporedje $\{a_n\}$ doseže največjo vrednost pri $n = 5$ in $n = 6$, torej*

$$\max_n a_n = a_5 = a_6 = -5^3 + 91 \cdot 5 + 5 = -125 + 455 + 5 = 335.$$

Najmanjši člen ne obstaja, saj zaporedje limitira proti $-\infty$.

- *Zaporedje $\{b_n\}$ pada za vse indekse n. Supremum je zato prvi člen,*

$$\sup_n b_n = b_1 = 1 + \frac{1}{3 \cdot 1^3} = \frac{4}{3},$$

infimum pa limita zaporedja,

$$\inf_n b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{3n^3}) = 1.$$

- *Izračunajmo še limito*

$$\lim_{n\to\infty} {b_n}^{a_n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{3n^3})^{-n^3+91n+5} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{3n^3})^{3n^3 \cdot \frac{-n^3+91n+5}{3n^3}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-n^3+91n+5}{3n^3}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-n^3+91n+5}{3n^3}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

Uporabili smo znan rezultat: $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Naloga 3 (20 točk)

Funkcija $F(x)$ je podana takole:

$$F(x) = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\, dx \quad \text{in} \quad F(0) = \frac{1}{2}.$$

- Poenostavite funkcijski predpis funkcije $F(x)$, tj. izračunajte nedoločeni integral in določite aditivno konstanto C.
- Poiščite inverzno funkcijo $F^{-1}(x)$ k funkciji $F(x)$.

- *Najprej izračunajmo nedoločeni integral:*

$$F(x) = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\, dx = \frac{1}{2}\arctan(2x) + C.$$

Pri izračunu si lahko pomagamo z uvedbo nove spremenljivke v integral. Če izberemo $t = 2x$, dobimo $dt = 2\,dx$. Sedaj upoštevajmo še pogoj $F(0) = \frac{1}{2}$, torej:

$$F(0) = \frac{1}{2}\arctan 0 + C = 0 + C = \frac{1}{2}.$$

Sledi poenostavljen funkcijski predpis:

$$F(x) = \frac{1}{2}\arctan(2x) + \frac{1}{2}.$$

- *Pri izračunu inverzne funkcije $F^{-1}(x)$ si lahko pomagamo tako, da v funkcijskem predpisu $F(x)$ zamenjamo spremenljivki x in $y = F(x)$. Dobimo implicitno podano inverzno funkcijo $y = F^{-1}(x)$:*

$$x = \frac{1}{2}\arctan(2y) + \frac{1}{2}.$$

Njeno eksplicitno obliko dobimo takole:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\arctan(2y) + \frac{1}{2},\\
x &= \frac{1}{2}(\arctan(2y) + 1),\\
2x &= \arctan(2y) + 1,\\
\arctan(2y) &= 2x - 1,\\
2y &= \tan(2x - 1),\\
F^{-1}(x) = y &= \frac{1}{2}\tan(2x - 1).
\end{aligned}$$

Naloga 4 (20 točk)
Poiščite najmanjšo in največjo vrednost funkcije

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$$

na intervalu $[-1, 2]$.

Pri iskanju najmanjše in največje vrednosti funkcije moramo paziti na:

- *krajišči intervala, to sta* -1 *in* 2,
- *točke nezveznosti (tudi neodvedljivosti), to je* -2,
- *in stacionarne točke, to sta* $-2 + 2\sqrt{3}$ *in* $-2 - 2\sqrt{3}$, *saj je*

$$g'(x) = \frac{(2x-3)(x+2) - (x^2 - 3x + 2)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 8}{(x+2)^2}$$

in zato

$$g'(x) = 0 \iff x^2 + 4x - 8 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{3}.$$

Na danem intervalu $[-1, 2]$ *se nahajajo le točke* -1, 2 *in* $-2+2\sqrt{3}$. *Izračunajmo funkcijske vrednosti:*

$$\begin{aligned} g(-1) &= 6, \\ g(2) &= 0, \\ g(-2+2\sqrt{3}) &= \frac{(-2+2\sqrt{3})^2 - 3(-2+2\sqrt{3}) + 2}{2\sqrt{3}} = \frac{24 - 14\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{12 - 7\sqrt{3}}{\sqrt{3}} < 0. \end{aligned}$$

V veljavnost $12 - 7\sqrt{3} < 0$ *se lahko prepričamo takole:*

$$\begin{aligned} 12 - 7\sqrt{3} &<^? 0, \\ 12 &<^? 7\sqrt{3}, \\ 144 &<^? 49 \cdot 3, \\ 144 &< 147. \checkmark \end{aligned}$$

Sledi, funkcija $g(x)$ *doseže najmanjšo vrednost* $\frac{12-7\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ *pri* $x = -2 + 2\sqrt{3}$ *in največjo vrednost* 6 *pri* $x = -1$.

Naloga 5 (20 točk)
Izračunajte določeni integral

$$\int_1^2 x \ln(4x)\, dx\,.$$

Nedoločeni integral izračunamo z metodo integracije po delih (per partes):

$$\int x \ln(4x)\, dx = \frac{x^2}{2}\ln(4x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln(4x) - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln(4x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C.$$

Pri tem smo izbrali

$$\begin{aligned} u = \ln(4x) &\implies du = \frac{1}{x}\, dx, \\ dv = x\, dx &\implies v = \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Izračunajmo še določeni integral:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln(4x)\, dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(4x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2}\ln(4\cdot 2) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^2}{2}\ln(4\cdot 1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1^2}{2}\right) \\ &= 2\ln 2^3 - 1 - \frac{1}{2}\ln 2^2 + \frac{1}{4} = 6\ln 2 - 1 - \ln 2 + \frac{1}{4} = 5\ln 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$