REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Poiščite vsa realna števila x, ki zadoščajo neenačbi

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 1} < x - 1.$$

Zapišimo najprej pogoja, ki jima morata zadoščati izraz pod korenom (zato da bo neenačba definirana v obsegu realnih števil) in izraz na desni strani neenačbe (zato da po kvadriranju neenačbe ohranimo podatek o predznaku desne strani):

- $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$:
  To je kvadratna neenačba in $2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$. *Pripadajoča parabola seka abscisno os pri* $x_1 = \frac{1}{2}$ *in* $x_2 = 1$. *Sledi rešitev kvadratne neenačbe:* $x \in (-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, \infty)$.
- $x - 1 > 0$:
  To je linearna neenačba. Rešitev: $x > 1$.

Presek obeh pogojev predstavlja podmnožico realnih števil, ki so potencialne rešitve dane neenačbe:

$$\left((-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, \infty)\right) \cap (1, \infty) = (1, \infty).$$

Sedaj začetno neenačbo kvadrirajmo in uredimo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x^2 - 3x + 1} &< x - 1, \\
2x^2 - 3x + 1 &< (x - 1)^2, \\
2x^2 - 3x + 1 &< x^2 - 2x + 1, \\
x^2 - x &< 0, \\
x(x - 1) &< 0.
\end{aligned}$$

Presečišči parabole in abscisne osi sta v tem primeru $x_1 = 0$ *in* $x_2 = 1$. *Kot rešitev dobimo vsa realna števila iz odprtega intervala* $(0, 1)$. *Iskana rešitev je presek*

$$(1, \infty) \cap (0, 1) = \{\},$$

torej prazna množica.

Naloga 2 (20 točk)

Poiščite vsa kompleksna števila z, ki rešijo enačbo

$$z^3 = \frac{1 - 2i}{2 + i}.$$

Desno stran enačbe najprej poenostavimo:

$$\frac{1-2i}{2+i} = \frac{1-2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-4i-i-2}{4+1} = \frac{-5i}{5} = -i.$$

Enačbo

$$z^3 = -i$$

sedaj rešimo z uvedno polarnih koordinat:

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ -i &= 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}). \end{aligned}$$

Iz De Moivrove formule sledi enačba

$$r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}),$$

kjer mora veljati naslednje:

$$\begin{aligned} r^3 &= 1, \\ 3\varphi &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} r &= 1, \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi, \ \ k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Kompleksna spremenljivka z lahko zavzame tri različne vrednosti:

$$\begin{aligned} k=0: \ z^{(1)} &= 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i, \\ k=1: \ z^{(2)} &= 1(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \\ k=2: \ z^{(3)} &= 1(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Naloga 3 (20 točk)

Funkcija $F(x)$ je podana takole:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2-2}\,dx \quad \text{in} \quad F(0) = 0.$$

- Poenostavite funkcijski predpis funkcije $F(x)$, tj. izračunajte nedoločeni integral in določite aditivno konstanto C.
- Naj bo $G(x) = \sqrt{2} - e^x$. Izračunajte kompozicijo $(F \circ G)(x)$.

- *Najprej izračunajmo nedoločeni integral*

$$F(x)=\int\frac{1}{x^2-2}\,dx=\int\frac{1}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\,dx.$$

Pri izračunu si bomo pomagali z metodo delnih ulomkov:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}&=\frac{A}{x-\sqrt{2}}+\frac{B}{x+\sqrt{2}}=\frac{Ax+A\sqrt{2}+Bx-B\sqrt{2}}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\\&=\frac{(A+B)x+(A-B)\sqrt{2}}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}.\end{aligned}$$

Ko izenačimo števca prvega in zadnjega ulomka, dobimo sistem enačb za neznana A in B:

$$\begin{aligned}x^1:&\quad A+B&=0,\\x^0:&\quad (A-B)\sqrt{2}&=1.\end{aligned}$$

Rešitev sistema sta $A=\frac{\sqrt{2}}{4}$ in $B=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. Sledi

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\frac{1}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\,dx\\&=\int\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{x-\sqrt{2}}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{x+\sqrt{2}}\right)dx\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\left(\frac{1}{x-\sqrt{2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2}}\right)dx\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln|x-\sqrt{2}|-\ln|x+\sqrt{2}|\right)+C\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{|x-\sqrt{2}|}{|x+\sqrt{2}|}+C.\end{aligned}$$

Sedaj upoštevajmo še pogoj $F(0)=0$, torej:

$$F(0)=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{|0-\sqrt{2}|}{|0+\sqrt{2}|}+C=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln 1+C=C=0.$$

Sledi poenostavljen funkcijski predpis:

$$F(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{|x-\sqrt{2}|}{|x+\sqrt{2}|}.$$

- *Izračunajmo še kompozicijo:*

$$\begin{aligned}(F\circ G)(x)=F(\sqrt{2}-e^x)&=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{|\sqrt{2}-e^x-\sqrt{2}|}{|\sqrt{2}-e^x+\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{e^x}{|2\sqrt{2}-e^x|}\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln e^x-\ln|2\sqrt{2}-e^x|\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\ln|2\sqrt{2}-e^x|\right).\end{aligned}$$

Naloga 4 (20 točk)

Določite definicijsko območje, začetno vrednost, ničle, stacionarne točke in skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{6 - x}.$$

- *V definicijskem območju funkcije f so vsa realna števila x, za katera velja naslednje:*

$$\begin{aligned} 16 - x^2 &\geq 0, \\ 6 - x &\neq 0. \end{aligned}$$

  Rešitev prve neenačbe je interval realnih števil $[-4, 4]$. *Ker* $x = 6$ *ni v tem intervalu, je* $D_f = [-4, 4]$.

- *Začetna vrednost funkcije f je enaka*

$$f(0) = \frac{\sqrt{16 - 0}}{6 - 0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

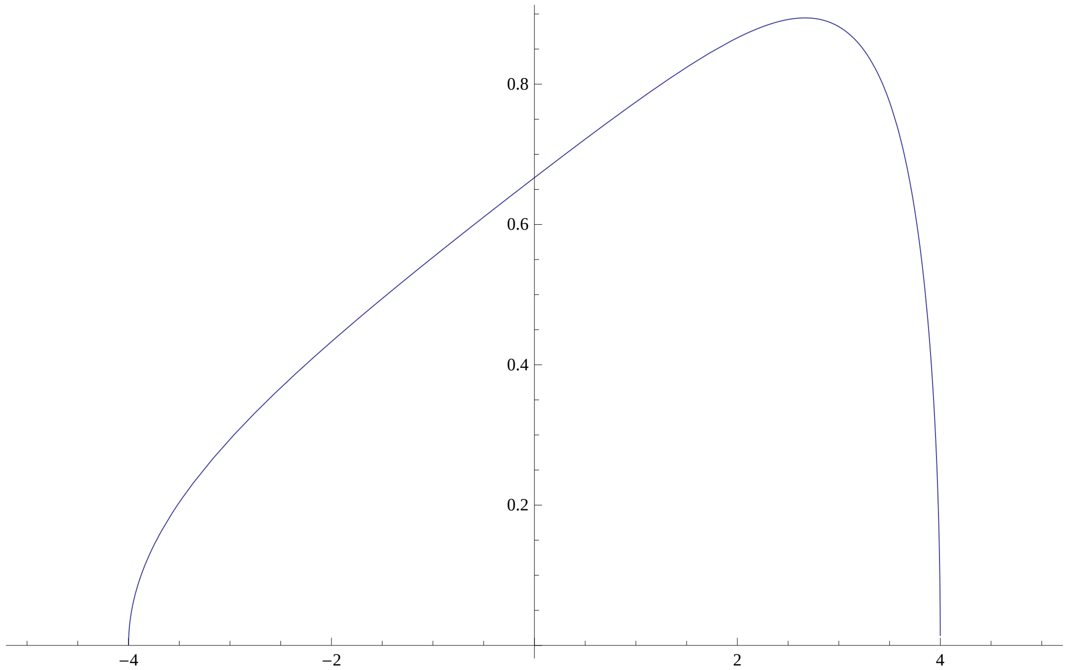
- *Ničle dobimo takole:*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ \frac{\sqrt{16 - x^2}}{6 - x} &= 0, \\ \sqrt{16 - x^2} &= 0, \\ 16 - x^2 &= 0, \\ (4 - x)(4 + x) &= 0, \\ x_1 = 4 \quad &in \quad x_2 = -4. \end{aligned}$$

- *Stacionarne točke so kandidati za lokalne ekstreme funkcije:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0, \\ \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{16-x^2}} \cdot (6 - x) - \sqrt{16 - x^2} \cdot (-1)}{(6 - x)^2} &= 0, \\ \frac{-x(6 - x) + 16 - x^2}{(6 - x)^2 \cdot \sqrt{16 - x^2}} &= 0, \\ \frac{16 - 6x}{(6 - x)^2 \cdot \sqrt{16 - x^2}} &= 0, \\ 16 - 6x &= 0, \\ x_3 &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

  Izračunajmo še funkcijsko vrednost v stacionarni točki: $f(\frac{8}{3}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.



Sedaj lahko narišemo graf funkcije f.

Naloga 5 (20 točk)

Izračunajte določeni integral

$$\int_0^2 e^{2x} \sin x \, dx \, .$$

Najprej izračunajmo nedoločeni integral

$$\int e^{2x} \sin x \, dx.$$

Z metodo integracije po delih, kjer vzamemo

$$u = e^{2x} \;(\Longrightarrow\; du = 2e^{2x} dx),$$
$$dv = \sin x \, dx \;(\Longrightarrow\; v = -\cos x),$$

dobimo

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = uv - \int v \, du = -e^{2x} \cos x + \int 2e^{2x} \cos x \, dx.$$

Če integracijo po delih uporabimo še enkrat,

$$u = 2e^{2x} \;(\Longrightarrow\; du = 4e^{2x} dx),$$
$$dv = \cos x \, dx \;(\Longrightarrow\; v = \sin x),$$

dobimo nazaj isti integral, kot smo ga imeli na začetku (s funkcijo pod integralom enako $e^{2x} \sin x$):

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = -e^{2x} \cos x + \int 2e^{2x} \cos x \, dx = -e^{2x} \cos x + \left(2e^{2x} \sin x - \int 4e^{2x} \sin x \, dx \right).$$

Če uvedemo oznako

$$X = \int e^{2x} \sin x \, dx,$$

se zgornja enačba glasi

$$X = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4X.$$

Neznanko X izrazimo iz enačbe:

$$X = -\frac{1}{5} e^{2x} (\cos x - 2 \sin x).$$

Sedaj izračunamo še določeni integral:

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{2x} \sin x \, dx &= \left[-\frac{1}{5} e^{2x} (\cos x - 2 \sin x) \right]_0^2 = -\frac{1}{5} e^4 (\cos 2 - 2 \sin 2) + \frac{1}{5} e^0 (\cos 0 - 2 \sin 0) \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^4 (\cos 2 - 2 \sin 2). \end{aligned}$$