

IZPIT IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

15. september 2011

1. Rešite neenačbo

$$|x + 2| - |2x - 3| \geq 2.$$

Rešitev:

Realno os razdelimo na tri podintervale in na vsakem posebej rešimo neenačbo brez absolutnih vrednosti.

i) $x < -2$:

$$\begin{aligned} -x - 2 + 2x - 3 &\geq 2 \\ x &\geq 7 \end{aligned}$$

Na tem podintervalu ni rešitve.

ii) $-2 \leq x < \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} x + 2 + 2x - 3 &\geq 2 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

Rešitev je interval $[1, \frac{3}{2})$.

iii) $x \geq \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} x + 2 - 2x + 3 &\geq 2 \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$

Rešitev je interval $[\frac{3}{2}, 3]$.

Rešitev prvotne neenačbe je unija rešitev posameznih podprimerov:

$$x \in [1, 3].$$

2. Izračunajte limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{2x}.$$

Rešitev:

Limito izračunamo z uporabo L'Hospitalovega pravila.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

3. Določite enačbi tangente in normale na graf funkcije

$$f(x) = x^3 \ln \frac{1}{x}$$

v točki $x_0 = 1$.

Rešitev:

Funkcijo odvajamo:

$$f'(x) = 3x^2 \ln \frac{1}{x} + x^3 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = x^2 \left(3 \ln \frac{1}{x} - 1\right).$$

Izračunamo $y_0 = f(x_0) = 0$, zato $T(1, 0)$. Smerni koeficient tangente: $k_t = f'(1) = -1$.
Enačba tangente:

$$\begin{aligned}y - y_0 &= k_t \cdot (x - x_0) \\y &= -x + 1\end{aligned}$$

Smerni koeficient normale: $k_n = -\frac{1}{k_t} = 1$. Enačba normale:

$$\begin{aligned}y - y_0 &= k_n \cdot (x - x_0) \\y &= x - 1\end{aligned}$$

4. Izračunajte integral

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 11}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx.$$

Rešitev:

Ulomek razstavimo na parcialne ulomke:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 + 3x + 11}{x^3 + x^2 + 4x + 4} &= \frac{2x^2 + 3x + 11}{(x^2 + 4)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x + 1} \\&= \frac{(A + C)x^2 + (A + B)x + B + 4C}{(x^2 + 4)(x + 1)}\end{aligned}$$

Dobimo sistem enačb $A + C = 2$, $A + B = 3$ in $B + 4C = 11$, ki ima rešitev $A = 0$, $B = 3$ in $C = 2$. Izračunamo integral:

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 11}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx = \int \frac{3}{x^2 + 4} dx + \int \frac{2}{x + 1} dx = \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + 2 \ln |x + 1| + K$$

5. Izračunajte volumen telesa, ki nastane, če krivuljo $r = 2\sqrt[3]{\varphi}$ zavrtimo okrog x -osi na intervalu $0 < \varphi < \pi$.

Rešitev:

Volumen izračunamo po formuli:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = 4\pi \int_0^{\pi} \varphi^{\frac{2}{3}} d\varphi = \frac{12\pi}{5} \varphi^{\frac{5}{3}} \Big|_0^{\pi} = \frac{12\pi^{\frac{8}{3}}}{5}.$$